Übungen zur Vorlesung
Einführung in die Logik
Blatt Große Übung 6

Prof. Dr. Roland Meyer,
Sören van der Wall Abgabe bis Do, 09. Juli 2020 um 23:59

*Bei vorigen Beweisaufgaben haben Sie häufig eine Beweis**strategie** erhalten (z.B. Beweisen Sie zunächst folgende Aussage ... durch einen Widerspruchsbeweis, führen Sie dann eine Induktion durch und erhalten sie die gewünschte Aussage ...). Hier müssen Sie selbst eine Beweisstrategie finden. Machen Sie sich zunächst klar, was für eine Aussage Sie beweisen wollen. Finden Sie dann eine passende Beweisstrategie! Erinnern Sie sich an die Ihnen bekannten Beweis-Taktiken: Beweis durch Widerspruch, Beweis durch Kontraposition (nur bei Implikativen Aussagen), Sei ... beliebig (bei All-Aussagen), Wir wählen ... als ... (bei Existenzaussagen), Induktion (bei All-Aussagen über induktive Mengen).*

Aufgabe 6.1 (Bereinigte Pränexnormalform — **20Pkt**)
Beweisen Sie folgenden Satz aus der Vorlesung:
Zu jeder Formel $A \in \mathsf{FO}(S)$ gibt es eine logisch äquivalente Formel $B \in \mathsf{FO}(S)$ in bereinigter Pränexnormalform (BPF).

Aufgabe 6.2 (Skolemform — **5 + 10 = 15Pkt**)

a) Berechnen Sie mit dem Verfahren aus der Vorlesung zu der Formel

$$(\exists x \forall y\colon p(x, f(y))) \wedge (\neg \forall y \forall x \exists z\colon\ [q(g(z), f(x)) \vee p(y, z)])$$

eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel in Skolemform.

b) Zeigen Sie, dass die Skolemisierung eine Formel liefern kann, die nicht äquivalent zur Eingabeformel ist.

Betrachten Sie hierfür die Formel $A \equiv \forall x \exists y\colon p(x, y) \in \mathsf{FO}(S)$ und ihre Skolemisierung $B \in \mathsf{FO}(S')$. Beachten Sie, dass man A auch als Formel über Signatur $S' = S \cup \mathit{Sko}$ auffassen kann.

Welche der folgenden Aussagen gilt?

- $A \models B$
- $B \models A$

Aufgabe 6.3 (Mächtigkeit von Datenbereichen — **5 + 5 + 5 = 15Pkt**)
Für eine Struktur $\mathcal{M} = (D, I)$ schreiben wir $|\mathcal{M}|$ für $|D|$, die Mächtigkeit von D. Wir nennen $\mathcal{M}$ *endlich*, falls die Menge D endlich ist.

a) Geben Sie für jedes $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 1$ abgeschlossene Formel A_n an, für die gilt:
$\mathcal{M} \models A_n$ genau dann, wenn $|\mathcal{M}| = n$.

b) Es sei B eine abgeschlossene Formel, in der „=" nicht vorkommt. Wie kann aus einem endlichen Modell $\mathcal{M}$ für B ein Modell $\mathcal{M}'$ für B konstruiert werden, so dass $|\mathcal{M}'| = |\mathcal{M}| + 1$?

Dass $\mathcal{M}'$ Modell für B ist, muss hier nicht unbedingt bewiesen werden.

c) Schließen Sie aus b), dass es für kein $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 1$ eine Formel gibt, die ohne „=" auskommt und äquivalent zur Formel A_n aus a) ist.