1 Der Hilbert-Kalkül $\mathcal{K}_o$

Für Formeln in der Junktorenmenge $\mathcal{J}_0 = \{\neg, \to\}$ besteht $\mathcal{K}_0$ aus einem Regel-Schema und drei Axiom-Schemata:

- $\dfrac{A \quad A \to B}{B}$ (MP) Abtrennungsregel oder Modus Ponens
- $\dfrac{}{B \to A \to B}$ (Ax1)
- $\dfrac{}{(A \to B \to C) \to (A \to B) \to A \to C}$ (Ax2)
- $\dfrac{}{(\neg B \to \neg A) \to A \to B}$ (Ax3)

Die zugehörige Ableitbarkeits-Relation wird in dieser VL mit $\vdash$ bezeichet. Weiterhin dürfen bei Ableitungen folgende in der VL bewiesene Tautologie-Schemata verwendet werden:

- (Th1) $\vdash A \to A$
- (Th2) $\vdash \neg\neg A \to A$
- (Th3) $\vdash \neg B \to B \to A$
- (Th4) $\vdash B \to \neg\neg B$
- (Th5) $\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$
- (Th6) $\vdash A \to \neg B \to \neg(A \to B)$
- (Th7) $\vdash (A \to B) \to (A \to \neg B) \to \neg A$
- (Th8) $\vdash (B \to A) \to (\neg B \to A) \to A$

2 Der Kalkül $\mathcal{K}_{\text{nat}}$ der natürlichen Deduktion

Für Formeln in der Junktorenmenge $\mathcal{J}_{\text{nat}} = \{\bot, \neg, \wedge, \vee, \to\}$ enthält $\mathcal{K}_{\text{nat}}$ nur 12 Regel-Schemata, von denen genau eins (DNE) den Unterschied zwischen intuitionistischer und klassischer Logik ausmacht, verfügt also über keine Axiome. Die Regeln für die Junktoren $\wedge$, $\to$, $\vee$ und $\neg$ treten paarweise (modulo Symmetrie von $\wedge$ und $\vee$) auf, wobei der fragliche Junktor eingeführt bzw. eliminiert wird. Im Fall von $\bot$ wird nur die Eliminierung benötigt, ebenso für die Regel (DNE), die als einzige mehr als einen Junktor betrifft.

	Introduktion	Elimination
$\wedge$	$\dfrac{G \quad H}{G \wedge H}\ (\wedge i)$	$\dfrac{G \wedge H}{G}\ (\wedge e)$ sowie $\dfrac{G \wedge H}{H}\ (\wedge e)$
$\to$	$\dfrac{\begin{bmatrix} G \\ \vdots \\ H \end{bmatrix}}{G \to H}\ (\to i)$	$\dfrac{G \quad G \to H}{H}\ (\to e)$
$\vee$	$\dfrac{G}{G \vee H}\ (\vee i)$ sowie $\dfrac{H}{G \vee H}\ (\vee i)$	$\dfrac{G \vee H \quad \begin{bmatrix} G \\ \vdots \\ K \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} H \\ \vdots \\ K \end{bmatrix}}{K}\ (\vee e)$
$\neg$	$\dfrac{\begin{bmatrix} G \\ \vdots \\ \bot \end{bmatrix}}{\neg G}\ (\neg i)$	$\dfrac{G \quad \neg G}{\bot}\ (\neg e)$
$\bot$	$\dfrac{}{\neg\bot}\ (\bot i)$ herleitbar!	$\dfrac{\bot}{G}\ (\bot e)$
$\neg\neg$	$\dfrac{G}{\neg\neg G}$ (DNI) herleitbar!	$\dfrac{G}{\neg\neg G}$ (DNE) klassisch!

Zur Unterscheidung von $\mathcal{K}_0$ haben wir die Ableitbarkeitsrelation mit $\Vdash$ bezeichnet.

3 Gentzens Sequenzen-Kalküle

3.1 Zwischenschritt: der einseitige ND-Sequenzen-Kalkül $\mathcal{K}_{\text{NDseq}}$

Die Junktorenmenge $\mathcal{J}_0$ bleibt unverändert, während die bisher externe Ableitbarkeitsrelation zu einem Syntax-Element mutiert: die zu manipulierenden Ausdrücke sind nicht länger Formeln, bzw., endliche Mengen von Formeln, sondern sog. einseitiger *Sequenzen* $\Gamma \vdash A$, die aus einer endlichen Formelmenge Γ und einer endlichen Formel A bestehen, mit $\vdash$ als suggestivem Trennsymbol. Die Sequenz $\Gamma \vdash A$ ist korrekt, sofern $\bigwedge \Gamma \to A$ eine Tautologie ist. Ziel ist es, korekte Sequenzen in ebensolche zu transformieren.

Zuächst bezeichet Γ *Tupel von Formeln*, bei denen Reihenfolge und Häufigkeit des Auftretens der Komponenten wichtig ist. Davon zu abstrahieren obliegt den *strukturellen* Regeln

$$\frac{\Gamma, G, F \vdash H}{\Gamma, F, G \vdash H}\ (xch) \quad , \quad \frac{\Gamma, F, F \vdash H}{\Gamma, F \vdash H}\ (ctr) \quad , \quad \frac{\Gamma \vdash H}{\Gamma, F \vdash H}\ (wkg)$$

Das einzige Axiom-Schema besagt, dass Prämissen ableitbar sind:

$$\frac{}{\Gamma, F, \Delta \vdash F}\ (ax)$$

Die intuitionistische Variante von $\mathcal{K}_{\text{nat}}$ liefert dann 11 *logische* Regel-Schemata:

	Introduktion	Elimination
$\wedge$	$\dfrac{\Gamma \vdash G \quad \Gamma \vdash H}{\Gamma \vdash G \wedge H}\ (\wedge i)$	$\dfrac{\Gamma \vdash G \wedge H}{\Gamma \vdash G}\ (\wedge e) \quad , \quad \dfrac{\Gamma \vdash G \wedge H}{\Gamma \vdash H}\ (\wedge e)$
$\to$	$\dfrac{\Gamma, F \vdash G}{\Gamma \vdash G \to H}\ (\to i)$	$\dfrac{\Gamma \vdash G \quad \Gamma \vdash G \to H}{\Gamma \vdash H}\ (\to e)$
$\vee$	$\dfrac{\Gamma \vdash G}{\Gamma \vdash G \vee H}\ (\vee i) \quad , \quad \dfrac{\Gamma \vdash H}{\Gamma \vdash G \vee H}\ (\vee i)$	$\dfrac{\Gamma \vdash G \vee H \quad \Gamma, G \vdash K \quad \Gamma, H \vdash K}{\Gamma \vdash K}\ (\vee e)$
$\neg$	$\dfrac{\Gamma, F \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg F}\ (\neg i)$	$\dfrac{\Gamma \vdash F \quad \Gamma \vdash \neg F}{\Gamma \vdash \bot}\ (\neg e)$
$\bot$		$\dfrac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash G}\ (\bot e)$

Aber statt den Kalkül mit Hilfe von (DNE) für die klassische Logik anzupassen, führte Genzen dafür einen 2-seitigen Kalkül ein:

3.2 Der zweiseitige Sequenzen-Kalkül $\mathcal{K}_{\text{seq}}$

Zweiseitige Sequenzen $\Gamma \vdash \Delta$ mit endlichen Tupeln von Formeln sind korrekt, wenn $\bigwedge \Gamma \to \bigvee \Delta$ eine Tautologie ist.

Die strukturellen Regeln werden zu links- und rechtsseitigen Varianten verdoppelt, je nachdem auf welcher Seite von $\vdash$ agiert wird:

R	L
$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta_0, A, B, \Delta_1}{\Gamma \vdash \Delta_0, B, A, \Delta_1}$ (x-R)	$\dfrac{\Gamma_0, A, B, \Gamma_1 \vdash \Delta}{\Gamma_0, B, A, \Gamma_1 \vdash \Delta}$ (x-L)
$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta_0, A, A, \Delta_1}{\Gamma \vdash \Delta_0, A, \Delta_1}$ (c-R)	$\dfrac{\Gamma_0, A, A, \Gamma_1 \vdash \Delta}{\Gamma_0, A, \Gamma_1 \vdash \Delta}$ (c-L)
$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta_0, \Delta_1}{\Gamma \vdash \Delta_0, A, \Delta_1}$ (w-R)	$\dfrac{\Gamma_0, \Gamma_1 \vdash \Delta}{\Gamma_0, A, \Gamma_1 \vdash \Delta}$ (w-L)

Das einzige Axiom-Schema nimmt nun eine symmetrische Form an

$$\frac{}{\Gamma, F \vdash \Delta, F} \quad (\text{AX})$$

Speziell im Fall $F = \bot$ kann man $\bot$ als neutrales Element bzgl. $\vee$ auf der rechten Seite weglassen.

Die $\mathcal{K}_{\text{NDseq}}$-Einführungsregeln entstehen im Wesentlichen durch Einfügen eins Tupels (einer Menge) Δ rechts des Trennsymbols $\vdash$. Dagegen sind die ersten fünf $\mathcal{K}_{\text{NDseq}}$-Eliminationsregeln durch Einführungsregeln auf der *linken* Seite zu ersetzen. Dabei wird die bekannte Dualität zwischen $\wedge$ und $\vee$ ausgenutzt, etwa in $(\wedge R)$ und $(\vee L)$, sowie $(\vee R)$ und $(\wedge L)$. Das Schema $(\to L)$ ergibt sich schließlich aus $(\vee L)$, indem man G durch $\neg G$ ersetzt und $(\neg L)$ berücksichtigt. In den folgenden acht *logischen* Regel-Schemata ist $(\bot e)$ aus $\mathcal{K}_{\text{NDseq}}$ nicht mehr berücksichtigt, hier greift der oben erwähnte Spezialfall von (ax):

	R	L
$\wedge$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, G \quad \Gamma \vdash \Delta, H}{\Gamma \vdash \Delta, G \wedge H}$ $(\wedge R)$	$\dfrac{\Gamma, G, H \vdash \Delta}{\Gamma, G \wedge H \vdash \Delta}$ $(\wedge L)$
$\to$	$\dfrac{\Gamma, G \vdash \Delta, H}{\Gamma \vdash \Delta, G \to H}$ $(\to R)$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, G \quad \Gamma, H \vdash \Delta}{\Gamma, G \to H \vdash \Delta}$ $(\to L)$
$\vee$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, G, H}{\Gamma \vdash \Delta, G \vee H}$ $(\vee R)$	$\dfrac{\Gamma, G \vdash \Delta \quad \Gamma, H \vdash \Delta}{\Gamma, G \vee H \vdash \Delta}$ $(\vee L)$
$\neg$	$\dfrac{\Gamma, F \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg F}$ $(\neg R)$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, F}{\Gamma, \neg F \vdash \Delta}$ $(\neg L)$

Der Tatsache, dass die Formeln im „Nenner“ dieser Regeln immer komplexer werden wirkt die *Schnittregel* (engl. cut) entgegen:

$$\frac{\Gamma_0 \vdash \Delta_0, A \qquad A, \Gamma_1 \vdash \Delta_1}{\Gamma_0, \Gamma_1 \vdash \Delta_0, \Delta_1} \quad (\text{CUT})$$

die man nach Gentzens Hauptsatz aber algorithmisch wieder aus Beweisen entfernen kann (engl. cut-elimination).