Einführung in die Logik

Aufgabenblatt 0, 2022-04-19

Präsenzaufgabe 1

Besprechung von Anhang B, Abzählbarkeit.

Präsenzaufgabe 2

Alternative Charakterisierung der Funktionen: Zeigen Sie, dass $A \xrightarrow{R} B$ genau dann eine Funktion ist, wenn eine Relation $B \xrightarrow{S} A$ existiert mit $\boldsymbol{id}_A \subseteq R;S$ und $S;R \subseteq \boldsymbol{id}_B$. (Kann man mehr über S sagen?)

Lösungsvorschlag:

($\Longrightarrow$) Für $A \xrightarrow{f} B$ wähle $S := f^{\mathrm{op}}$. Wegen $af[f(a)]f^{\mathrm{op}}a$ für jedes $a \in A$ folgt dann $\boldsymbol{id}_A \subseteq f;f^{\mathrm{op}}$. Die Einwertigkeit von f impliziert zudem, dass aus $bf^{\mathrm{op}}afc$ folgt $b = f(a) = c$, also $f^{\mathrm{op}};f \subseteq \boldsymbol{id}_B$.

($\Longleftarrow$) Aus $\boldsymbol{id}_A \subseteq R;S$ folgt nach Definition der Relationenkomposition die Totalität von R , denn zu jedem $a \in A$ existiert mindestens ein $b \in B$ mit $aRbSa$. Für jedes $c \in B$ folgt aus aRc dann $bSaRc$ und wegen $S;R \subseteq \boldsymbol{id}_B$ somit $b = c$. Also ist R auch einwertig.

Wenden wir $(-)^{\mathrm{op}}$ auf obige Bedingungen an, so erhalten wir $(\boldsymbol{id}_A)^{\mathrm{op}} = \boldsymbol{id}_A \subseteq S^{\mathrm{op}};R^{\mathrm{op}}$ und $R^{\mathrm{op}};S^{\mathrm{op}} \subseteq \boldsymbol{id}_B = (\boldsymbol{id}_B)^{\mathrm{op}}$, damit ist S^{op} ebenfalls eine Funktion. Da für jedes $a \in A$ ein $b \in B$ existiert mit $aRbSa$, muß b sowohl der Funktionswert von a unter R wie auch unter S^{op} sein, damit gilt $S = R^{\mathrm{op}}$.

Präsenzaufgabe 3

Diese Aufgabe verwendet die Baumdarstellung aussagenlogischer Formeln, vergl. Folie 28.

Für A sei $k(A)$ die Anzahl der Knoten in der Baumdarstellung, während deren Tiefe gegeben ist durch

- $t(A) = 0$, falls A atomar ist;
- $t(\neg B) = t(B) + 1$
- $t(B * C) = \max\{t(B), t(C)\} + 1$, falls $*$ binär ist.

Beweisen Sie mittels struktureller Induktion über den Aufbau aussagenlogischer Formeln

(a) $|A| \leq 5j_A + 1$ wobei j_A die Anzahl der Baumknoten ist, die keine Blätter und daher mit (mindestens unären) Junktoren markiert sind.

(b) $|A| \leq 4 \cdot 2^{t(A)} - 3$.

Lösungsvorschlag:

(a) Atomare Formeln und konstante Junktoren erfüllen $k = 0$ und haben die Länge $1 \leq 5k+1$.
Falls $A = \neg B$ und B erfüllt die Behauptung, dann gilt

$$|A| = |B| + 1 \leq 5j_B + 2 = 5(j_B + 1) - 3 = 5j_A - 3 \leq 5j_A - 3 \leq 5j_A + 1$$

Falls $A = (B * C)$ und sowohl B als auch C erfüllen die Behauptung, dann gilt

$$|A| = |B| + |C| + 3 \leq 5j_B + 5j_C + 5 = 5(j_B + j_C + 1) = 5j_A \leq 5j_A + 1$$

(b) Atomare Formeln und konstante Junktoren erfüllen $|A| = 1$ und $t(A) = 0$, und somit $|A| \leq 4 \cdot 2^0 - 3 = 1$.
Falls $A = \neg B$ und B erfüllt die Behauptung, dann gilt

$$|A| = |B| + 1 \leq 4 \cdot 2^{t(B)} - 2 < 4 \cdot 2^{t(A)-1} \leq 4 \cdot (2^{t(A)} - 1) \leq 4 \cdot 2^{t(A)} - 3$$

Falls $A = (B * C)$ und sowohl B als auch C erfüllen die Behauptung, dann gilt

$$|A| = |B| + |C| + 3 \leq 4 \cdot \left(2^{t(B)} + 2^{t(C)}\right) - 3 \leq 4 \cdot 2^{\max\{t(B),t(C)\}+1} - 3$$

Wegen $t(A) = \max\{t(B), t(C)\} + 1$ zeigt das die Behauptung.

Hausaufgabe 4 [10 PUNKTE]

Beweisen Sie den Satz am von Anhang B: Folgende Bedingungen für sind äquivalent für eine Menge B:

(a) B ist abzählbar.

(b) $B = \emptyset$ oder es gibt eine surjektive Abbildung $\mathbb{N} \xrightarrow{g} B$.

(c) Es gibt eine surjektive *partielle* Abbildung (= einwertige Relation, nicht notwendig total) $\mathbb{N} \xrightarrow{h} B$.

Lösungsvorschlag:

(a) ⇒ (b). Falls $\emptyset \neq B \xrightarrow{f} \mathbb{N}$ injektiv ist, so wähle $b_0 \in B$ und definiere $\mathbb{N} \xrightarrow{g} B$ wie folgt

$$g(n) := \begin{cases} b & \text{falls } f(b) = n \\ b_0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Nach Konstruktion ist g total und wegen der Injektivität von f auch einwertig. Da f total war, ist g surjektiv.

(b) ⇒ (c). Jede surjektive totale Abbildung ist auch eine surjektive partielle Abbildung, was den Fall $B \neq \emptyset$ erledigt. Andernfalls ist die leere Teilmenge $\emptyset \subseteq \mathbb{N} \times \emptyset$ eine, zugegeben pathologische, surjektive partielle Abbildung.

(c) ⇒ (a). Wegen der Surjektivität hat jedes $b \in B$ ein nichtleeres Urbild $\emptyset \neq g^{-1}(b) \subseteq \mathbb{N}$. Daraus wählen wir eine Zahl $f(b)$ aus, etwa die kleinste Zahl. Die Totalität und Einwertigkeit von f sind klar. Da für $b \neq c \in \mathbb{N}$ die g-Urbilder disjunkt sind, ist f in der Tat injektiv.

Hausaufgabe 5 [10 PUNKTE]

Zeigen oder widerlegen Sie: Jede transitive symmetrische totale Relation ist reflexiv.

Lösungsvorschlag:

$A \xrightarrow{R} A$ sei transitiv, symmetrisch und total. Zu zeigen: aRa für jedes $a \in A$.

- Wegen der Totalität existiert $b \in A$ mit aRb.
- Wegen der Symmetrie gilt dann auch bRa.
- Wegen $aRbRa$ liefert die Transitivität liefert dann aRa.

Dieser für Mathematiker typische doch recht informelle Beweis setzt die Kenntnis der Definitionen und bestimmter Schlußregeln voraus, die i.A. nicht explizit gemacht werden. Er ist aber nicht maschinen-lesbar, und in dieser Form vermutlich auch nicht von einerm Programm erzeugt worden.

Wir werden später in der Vorlesung einen algorithmisch erzeugten Beweis der obigen Behauptung kennenlernen (mit Hilfe der Tableaux-Methode der Prädikatenlogik), der dementsprechend völlig explizit ist.

Hausaufgabe 6 [14 PUNKTE]

Formeln sind bestimmte wohlgeformte Wörter (= endliche Tupel) über dem Alphabet der Aussagenlogik, welches aus Junktoren ($\perp$, $\top$, $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$) und Variablen (p , q , r , ...) und ggf. Klammern besteht, letztere zwingend im Fall der Infix-Schreibweise binärer Junktoren (vergl. Folien 26–28). Teilformeln rekursiv definiert (Folien 36, 37).

(a) Finden Sie alle Teilformeln von $A = \neg((\neg r \vee p) \wedge q)$ und färben Sie jeweils den entsprechenden Teil des Syntaxbaums von A ein.

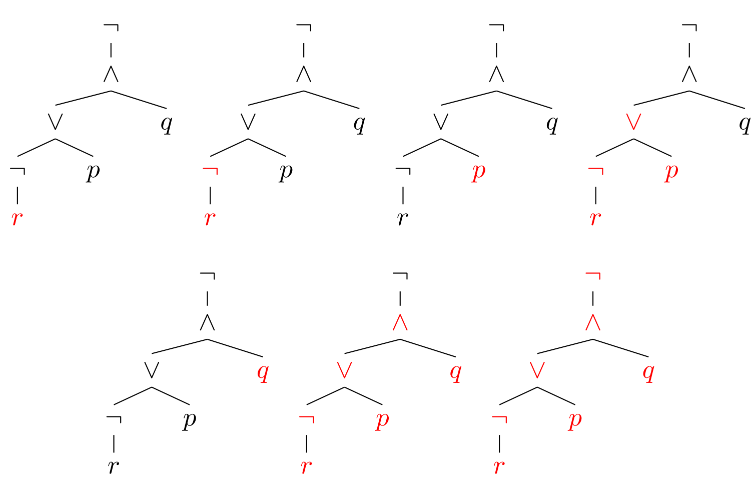
(b) Formulieren und beweisen Sie eine Vermutung über den Zusammenhang von Teilformeln und Teilwörtern der konventionellen linearen Darstellung von Formeln.

Lösungsvorschlag:

Nach Definition:

$$\begin{aligned}
T(A) &= \{A\} \cup T\big(((\neg r \vee p) \wedge q)\big) \\
&= \{A, ((\neg r \vee p) \wedge q)\} \cup T\big((\neg r \vee p)\big) \cup T(q) \\
&= \{A, ((\neg r \vee p) \wedge q), (\neg r \vee p), q\} \cup T(\neg r) \cup T(p) \\
&= \{A, ((\neg r \vee p) \wedge q), (\neg r \vee p), q, \neg r, p\} \cup T(r) \\
&= \{A, ((\neg r \vee p) \wedge q), (\neg r \vee p), q, \neg r, p, r\}
\end{aligned}$$

In der Baumdarstellung



Als markierte Teilwörter:

$$\neg((\neg r \lor p) \land q)\ ,\ \neg((\neg r \lor p) \land q)\ ,\ \neg((\neg r \lor p) \land q)\ ,\ \neg((\neg r \lor p) \land q)$$
$$\neg((\neg r \lor p) \land q)\ ,\ \neg((\neg r \lor p) \land q)\ ,\ \neg((\neg r \lor p) \land q)$$

Vermutung: Die Teilformeln von A sind genau die zusammenhängenden Teilwörter von A, die selber Formeln darstellen.

Beweis mit struktureller Induktion:

- Klar für atomare Formeln und konstante Junktoren.
- Die Behauptung sei korrekt für Formeln mit weniger Junktoren als die molekulare Formel A.

  $A = \neg B$ hat als Teilformeln neben A noch diejenigen von B. Letztere sind genau die zusammenhängenden Teilwörter von B, die selber Formeln sind. Als Teilwörter von A sind diese immer noch zusammenhängend.

  Ist umgekehrt das zusammenhängende Teilwort C von A eine Formel, sind zwei Fälle zu unterscheiden:

  – Die führende Negation gehört nicht zu C: dann ist C zusammenhängendes Teilwort von B, nach Voraussetzung selber eine Formel, und damit echte Teilformel von A.
  – Die führende Negation gehört zu C, etwa $C = \neg D$: Nach voraussetzung ist D auch eine Formel und damit ein zusammenhängendes Teilwort von B. Sofern D kein Atom ist, enthält es den Hauptjunktor von B. Nach Definition von Teilformeln muß dann $D = B$ und folglich $C = A$ gelten.

  $A = (B \star C)$ hat als Teilformeln neben A noch diejenigen von B und von C. Letztere sind genau die zusammenhängenden Teilwörter von B bzw C, die selber Formeln sind. Als Teilwörter von A sind sie immer noch zusammenhängend.

  Ist umgekehrt das zusammenhängende Teilwort D von A eine Formel, sind zwei Fälle zu unterscheiden:

  – $\star$ gehört nicht zu D: dann ist D zusammenhängendes Teilwort von B oder von C, nach Voraussetzung selber eine Formel, und damit echte Teilformel von A.
  – $\star$ gehört zu D, etwa $D = (E \star F)$: Nach Voraussetzung sind E und F auch Formeln und damit zusammenhängende Teilwörter von B bzw. C. Analog wie oben muß gelten $E = B$ und $F = C$, also auch $D = A$.

Die folgende Aufgabe setzt die 2. Vorlesung am 27. April voraus.

Hausaufgabe 7 [16 PUNKTE]

(a) [3 PUNKTE] Sei φ eine Bewertung mit $\varphi(p) = 1$ und $\varphi(q) = \varphi(r) = 0$. Berechnen Sie den Wert
$$\widehat{\varphi}(\neg(p \to q) \lor r)$$
schrittweise gemäß der Definition.

(b) [5 PUNKTE] Beweisen oder widerlegen Sie, dass $q \to (r \to (p \lor q))$ eine Tautologie ist.

(c) [3 PUNKTE] Beweisen oder widerlegen Sie, dass $\{q \to p\} \models p \to q$ gilt.

(d) [5 PUNKTE] Beweisen oder widerlegen Sie, dass $\neg p \lor \neg q \models\!\!\!\!\!\!\;\;\dashv \neg(p \land q)$, wobei $A \models\!\!\!\!\!\!\;\;\dashv B$ abkürzend für $\{A\} \models B$ und $\{B\} \models A$ steht.

Lösungsvorschlag:

Man instanziiert die Junktoren in $\mathcal{J}$ zu Operationen auf $\mathbb{B}$, wie in Folie 41 angegeben und erhält eine $\mathcal{J}$-Algebra. Oder man verwendet die Wahrheitstabellen auf Folie 42.

(a)

$$\underbrace{\underbrace{\neg(\underbrace{\underbrace{p}_{1} \to \underbrace{q}_{0}}_{0})}_{1} \vee \underbrace{r}_{0}}_{1}$$

Alternativ kann man auch ”‘algebraisch”’ umformen:

$$\begin{aligned}
\varphi(\neg(p \to q) \vee r) &= \sup\{\varphi(\neg(p \to q)), \varphi(r)\} \\
&= \sup\{1 - \varphi(p \to q), 0\} \\
&= \sup\{1 - \leq \langle \varphi(p), \varphi(q) \rangle, 0\} \\
&= \sup\{1 - \leq \langle 1, 0 \rangle, 0\} \\
&= \sup\{1 - 0, 0\} \\
&= \sup\{1, 0\} \\
&= 1
\end{aligned}$$

(b) Wir geben $\boldsymbol{e}_A$ tabellarisch an (Wahrheitstabelle):

p	q	r	q	$\to$	$(r$	$\to$	$(p$	$\vee$	$q))$
0	0	0	0	**1**	0	1	0	0	0
0	0	1	0	**1**	1	0	0	0	0
0	1	0	1	**1**	0	1	0	1	1
0	1	1	1	**1**	1	1	0	1	1
1	0	0	0	**1**	0	1	1	1	0
1	0	1	0	**1**	1	1	1	1	0
1	1	0	1	**1**	0	1	1	1	1
1	1	1	1	**1**	1	1	1	1	1

Da die Hauptspalte (fett gedruckt) nur Einsen enthält, ist $q \to (r \to (p \vee q))$ eine Tautologie.

(c) Die Bedingung $\widehat{\varphi}(p \to q) = 1$ bzw. $\widehat{\varphi}(q \to p) = 1$ sind äquivalent zu $\varphi(p) \leq \varphi(q)$, bzw. $\varphi(q) \leq \varphi(p)$. Aber keine der letzten beiden Bedingungen impliziert die andere: Wähle etwa φ mit $\varphi(p) = 0$ und $\varphi(q) = 1$. Dann gilt $\widehat{\varphi}(p \to q) = 1$ aber $\widehat{\varphi}(q \to p) = 0$. Daher ist die Behauptung falsch.

(d) Da der logische Folgerungsbegriff semantisch definiert ist, lohnt auch hier ein Blick auf die Tabellen der Boole'schen Funktionen:

p	q	$\neg$	p	$\vee$	$\neg$	q
0	0	1	0	**1**	1	0
0	1	1	0	**1**	0	1
1	0	0	1	**1**	1	0
1	1	0	1	**0**	0	1

p	q	$\neg$	$(p$	$\wedge$	$q)$
0	0	**1**	0	1	0
0	1	**1**	0	1	1
1	0	**1**	1	1	0
1	1	**0**	1	0	1

Die Wahrheitswerte der Formeln $\neg p \vee \neg q$ und $\neg(p \wedge q)$ stimmen für alle möglichen Belegungen überein.

(Die Behauptung ist übrigens äquivalent dazu, dass es sich bei $(\neg p \vee \neg q) \leftrightarrow (\neg(p \wedge q)$ um eine Tautologie handelt.)

And now for something completely different:

Hausaufgabe 8 [0 PUNKTE]

Überzeugen Sie sich selbst vom beklagenswerten Zustand der Logik im Mittelalter, speziell hinsichtlich der Identifizierung von Hexen, in folgendem halbdokumentarischen Film:

https://www.youtube.com/watch?v=yp_l5ntikaU

Versuchen Sie, das Argument von Bedevere zu formalisieren. Im Laufe der Vorlesung sollten einige Fehler deutlich werden (kein Problem, wenn Sie die jetzt noch nicht finden).