Technische Universität Braunschweig

TCS

Dr. Jürgen Koslowski

Einführung in die Logik

Aufgabenblatt 1, 2022-05-02

Präsenzaufgabe 1

Laut VL ist die Menge $\mathcal{F}[\mathcal{A}]/_{\Dashv\vDash}$ der Äquivalenzklassen von Formeln kanonisch eine $\mathcal{J}$-Algebra. Definieren Sie explizit die Interpretationen der Junktoren und weisen Sie nach, dass diese *wohldefiniert* sind, d.h., nicht von der Wahl der Repräsentanten abhängen.

Lösungsvorschlag:

Vorbemerkung: Irgendwann sollten alle Studenten mal gesehen haben, wie der Übergang zu einer *Faktoralgebra* funktioniert, also, wie sich die Algebrastruktur nur dann auf die Äquivalenzklassen übertragen läßt, wenn die in Frage stehende Relation eine Kongruenzrelation ist, d.h. grob gesprochen, mit den Algebra-Operationen verträglich ist.

Das Schema ist immer dasselbe: um Operationen auf Ä-Klassen zu übertragen wählt man beliebige Elemente der in Frage stehenden Ä-Klassen, sog. *Repräsentanten*, wendet auf diese die Operation der zugrundeliegende Algebra an, und bildet dann die Ä-Klasse des Ergebnisses.

Nachzuweisen ist, dass die Ä-Klasse des Ergebnisses *unabhängig* von der Wahl der Repräsentanten in den Argumenten ist. Man sagt dann, die Operationen auf den Ä-Klassen seien *wohldefinert*.

Die Ä-Klasse eines Elements A wird häufig mit $[A]$ bezeichnet.

Konkret zur Interpretation der Junktoren auf der Menge der $\mathcal{F}[\mathcal{A}]/_{\Dashv\vDash}$ der Ä-Klassen:

- Als Konstanten verwenden wir $[\bot]$ sowie $[\top]$; hier ist nichts weiter zu zeigen.
- Setze $\neg[A] := [\neg A]$.
- Setze $[A] \star [B] := [A \star B]$

Vorsicht: wir haben die zu definierenden Operatoren auf $\mathcal{F}[\mathcal{A}]/_{\Dashv\vDash}$ genauso genannt wie die schon vorliegenden Operatoren auf $\mathcal{F}[\mathcal{A}]$. Das sollte normalerweise nicht zu Verwirrung führen.

Die Eigenschaft, dass $\Dashv\vDash$ eine Kongruenzrelation ist (Satz auf Folie 59) ist genau die Bedingung, die sicherstellt, dass die Operatoren auf $\mathcal{F}[\mathcal{A}]/_{\Dashv\vDash}$ wohldefiniert, also unabhängig von der Wahl der Repräsentanten sind, nämlich

- Aus $[A] = [A']$ folgt $[\neg A] = [\neg A']$.
- Aus $[A] = [A']$ und $[B] = [B']$ folgt $[A \star B] = [A' \star B']$.

Präsenzaufgabe 2

In dieser VL möchten wir das Symbol $\models$ für die Folgerelation zwischen Formelmengen und einzelnen Formeln nicht weiter überladen (wie häufig praktiziert). Daher bezeichnen wir die induzierte binäre Relation auf $\mathcal{F}[\mathcal{A}]$ mit $\sqsubseteq$.

1. Zeigen Sie, dass $\sqsubseteq$ als Relation auf $\mathcal{F}[\mathcal{A}]$ eine Quasi-Ordnung, aber keine Halb-Ordnung, d.h., nicht antisymmetrisch ist.
2. Zeigen Sie, dass für jede quasi-geordnete Menge $\langle X, \sqsubseteq\rangle$ der Durchschnitt von $\sqsubseteq$ mit ihrer dualen Relation $\sqsubseteq^{\mathrm{op}} = \sqsupseteq$ immer eine Äquivalenzrelation ist.
3. Speziell auf $\mathcal{F}[\mathcal{A}]$ haben wir die entsprechende Relation mit $\Dashv\vDash$ bezeichnen. Untersuchen Sie in folgenden Fällen, ob die angegebenen Formeln äquivalent sind (beachten Sie die Klammervereinfachungsregeln):
   - $A \to B$ sowie $\neg A \vee B$;
   - $A \to B \to C$ sowie $(A \to B) \to C$.

Lösungsvorschlag:

1. Reflexivität ist trivial. Zur Transitivität: Falls $A \sqsubseteq B \sqsubseteq C$ gilt für jede Belegung φ :
   $$\widehat{\varphi}(A) \leq \widehat{\varphi}(B) \leq \widehat{\varphi}(C)$$
   und somit auch $\widehat{\varphi}(A) \leq \widehat{\varphi}(C)$, also $A \sqsubseteq C$.

   Die Absorbtionsregel $A \Dashv\vDash A \wedge (B \vee A)$ zeigt, dass die Antisymmetrie verletzt ist (hier sind viele andere Gegenbeispiele möglich).
2. Reflexivität und Transitivität bleiben beim Durchschnitt von Relationen erhalten, damit ist auch $D := \ \sqsubseteq \cap \sqsupseteq$ reflexiv und transitiv. Die Symmetrie von D folgt nun nach Konstruktion:
   $$\langle a, b\rangle \in D \quad \text{gdw.} \quad a \sqsubseteq b \text{ und } b \sqsubseteq a \quad \text{gdw.} \quad b \sqsubseteq a \text{ und } a \sqsubseteq b \quad \text{gdw.} \quad \langle b, a\rangle \in D$$
3. Verwende Wahrheistabellen; der erste Fall liefern eine positive Antwort, der zweite Fall nicht.

   Alternative Lösung für Fall 2: In der VL hatten wir gezeigt, dass die Interpretation des Junktors $\to$ auf $\mathcal{F}[\mathcal{A}]$ bzgl. der Quasiordnung $\sqsubseteq$ der eine monotone Funktion induziert
   $$\mathcal{F}[\mathcal{A}]^{\mathrm{op}} \times \mathcal{F}[\mathcal{A}] \xrightarrow{\ \to\ } \mathcal{F}[\mathcal{A}]$$
   Die Formel auf der linken Seite beschreibt also eine monotone Funktion
   $$\mathcal{F}[\mathcal{A}]^{\mathrm{op}} \times \big(\mathcal{F}[\mathcal{A}]^{\mathrm{op}} \times \mathcal{F}[\mathcal{A}]\big) = \mathcal{F}[\mathcal{A}]^{\mathrm{op}} \times \mathcal{F}[\mathcal{A}]^{\mathrm{op}} \times \mathcal{F}[\mathcal{A}] \xrightarrow{\ f\ } \mathcal{F}[\mathcal{A}]$$
   während die Formel auf der rechten Seite von einer monotonen Funktion
   $$\big(\mathcal{F}[\mathcal{A}]^{\mathrm{op}} \times \mathcal{F}[\mathcal{A}]\big)^{\mathrm{op}} \times \mathcal{F}[\mathcal{A}] = \mathcal{F}[\mathcal{A}] \times \mathcal{F}[\mathcal{A}]^{\mathrm{op}} \times \mathcal{F}[\mathcal{A}] \xrightarrow{\ g\ } \mathcal{F}[\mathcal{A}]$$
   induziert. Da $\sqsubseteq$ weder die Identität noch die maximale Relation $(\mathcal{F}[\mathcal{A}])^2$ ist, müssen sich $\mathcal{F}[\mathcal{A}]$ und $\mathcal{F}[\mathcal{A}]^{\mathrm{op}}$ unterscheiden, also können die Funktionen f und g nicht übereinstimmen. Insbesondere muß es im 1. Argument bereits eine Diskrepanz geben.

   Man kann auch die Boole'schen Funktionen von $F = p \to q \to r$ und $G = (p \to q) \to r$ betrachten, die ohne Berücksichtigung der Ordnung $\mathbb{B}^3$ auf $\mathbb{B}$ abbilden, aber mit deren Berücksichtigung wie folgt monoton sind,
   $$\mathbb{B}^{\mathrm{op}} \times \mathbb{B}^{\mathrm{op}} \times \mathbb{B} \xrightarrow{\ e_F\ } \mathbb{B} \quad \text{bzw.} \quad \mathbb{B} \times \mathbb{B}^{\mathrm{op}} \times \mathbb{B} \xrightarrow{\ e_G\ } \mathbb{B}$$
   Diese können nicht übereinstimmen. Da äquivalente Formeln *mit denselben Atomen* per Definition dieselbe Boole'che Formel erzeugen, folgt somit, dass F und G nicht äquivalent sein können.

   (Zugegeben, die Wahrheitstabelle wäre schneller gewesen, aber ohne Brücksichtigung der Quasiordnung wäre der konzeptionelle Unterschied zwischen F und G vielleicht gar nicht aufgefallen.)

Hausaufgabe 3 [10 PUNKTE]

Beweisen Sie das 2. Korollar zum Kompaktheitssatz auf Folie 53: Für eine Formelmenge Γ sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) Jede Belegung erfüllt mindestens eine Formel $B \in \Gamma$.

(b) Es gibt $n \in \mathbb{N}$ und $\boldsymbol{B} \in \Gamma^n$ mit $B_0 \vee \cdots \vee B_{n-1}$ allgemeingültig.

Lösungsvorschlag:

Man beachte, dass $n > 0$ gelten muß, denn die leere Disjunktion $\perp$ ist nicht allgemeingültig.

Der Übergang zur Menge $\neg\Gamma = \{ \neg A : A \in \Gamma \}$ erlaubt uns, jede der obigen Bedingungen wie folgt äquivalent umzuformulieren:

(a)' Jede Belegung erfüllt mindestens eine Formel $\neg B \in \neg\Gamma$ nicht.

(b)' Es gibt $n \in \mathbb{N}$ und $\boldsymbol{B} \in \Gamma^n$ mit $\neg B_0 \wedge \ldots \wedge \neg B_{n-1} = \neg(B_0 \vee \cdots \vee B_{n-1})$ unerfüllbar.

Eine weitere äquivalente Umformulierung liefert nun:

(a)" $\neg\Gamma$ ist unerfüllbar.

(b)" $\neg\Gamma$ hat eine endliche unerfüllbare Teilmenge (etwa $\{ \neg B_i : i < n \}$, die Reihenfolge ist irrelevant).

Offenbar sind die Aussagen (a)" und $(b)''$ genau dann äquivalent, wenn ihre Negationen äquivalent sind. Aber das sind gerade die bekanntlich äqivalenten Bedingugen des Kompaktheitssatzes:

(a)"' $\neg\Gamma$ ist erfüllbar.

(b)"' $\neg\Gamma$ ist endlich erfüllbar.

Wegen der Äquivalenz von (a)"' und (b)"' sind auch (a)" und (b)" äquivalent, ebenso (a)' und (b)' und schließlich auch (a) und (b).

Hausaufgabe 4 [16 PUNKTE]

Fakt: Auf einem Globus mit zusammenhängenden Ländern können diese aufgrund des berühmten *Vierfarbensatz* so gefärbt werden, dass benachbarte Länder verschiedene Farben tragen.

Zur Terminologie: Ein Land heißt *zusammenhängend*, wenn man je zwei seiner Punkte durch einen Weg (auf der Erd-Oberfläche) verbinden kann, der innderhalb des Landes verläuft. Inseln (Sylt) oder Exklaven (Kaliningrad) sind verboten[1] Zwei Länder heißen *benachbart*, wenn sie ein gemeinsames Stück Grenze haben, das keine *Ecke* ist, d.h., nicht zu drei oder mehr Ländern gehört (etwa Four Corners in den USA, wo Arizona, Colorado, New Mexico und Utah zusammentreffen; Arizona und Colorado sind nicht benachbart, ebensowenig Utah und New Mexico).

Alternativ kann man den *ungerichteten planaren Graphen* betrachten, dessen Knoten die Hauptstädte, und dessen Kanten Autobahen zwischen denselben sind, die die Grenze genau einmal überqueren und sich höchstens in den Hauptstädten schneiden (*Planarität*).

(a) [2 PUNKTE] Was bedeutet die 4-Färbbarkeit einer Landkarte für den zugehörigen planaren Graphen?

[1] Ein Land mit m Zusammenhangskomponenten heißt auch m-*Pire*; hier interessieren uns nur 1-Pires.

(b) [4 PUNKTE] Genügen vier Farben auch, wenn man in der graphentheoretischen Version auf die Forderung nach Planarität verzichtet, d.h., wenn sich die Kanten bei der Einbettung in die Kugeloberfläche auch schneiden dürfen? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) [6 PUNKTE] Konstruieren Sie für einen gegebenen Graphen $G = \langle V, E \rangle$ mit Hilfe atomarer Formeln der Form $C_{u,j}$, die die möglichen Färbungen $j < 4$ eines jeden Knoten $u \in V$ ausdrücken, eine Formelmenge Γ, die genau dann erfüllbar ist, wenn G 4-färbbar ist.

(d) [4 PUNKTE] Zeigen Sie mit Hilfe des Kompakteitssatzes, dass auch jeder unendliche planare Graph mit vier Farben gefärbt werden kann.

Lösungsvorschlag:

Wir sprechen hier von *ungerichteten* Graphen.

(a) Eine korrekte 4-Färbung weist den Knoten des Graphen Farben aus einer 4-elementigen Menge, etwa $4 = \{0, 1, 2, 3\}$, zu, so dass die Endpunkte jeder Kante verschiedenen Farben haben. Etwas mathematischer: Eine 4-Färbung ist ein Graphenmorphismus (= Knoten- und Kanten-erhaltende Abbildung) von $G = \langle V, E \rangle$ in den vollständigen Graphen K_4 mit Knotenmenge $\{0, 1, 2, 3\}$, in dem je zwei verschiedene(!) Knoten durch eine Kante verbunden sind.

(b) Nein, betrachte den vollständigen Graphen K_5 mit Knotenmenge $5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, in dem je zwei verschiedene Knoten durch eine Kante verbunden sind. Während K_4 noch planar ist, hat K_5 diese Eigenschaft nicht mehr (man versuche, den Knoten 4 in dieselbe Ebene zu zeichnen wie K_4, und dann mit allen Knoten von K_4 so zu verbinden, dass keine der vorhandenen Kanten geschnitten wird).

(c) Als Atome verwenden wir die Symbole $C_{u,x}$ mit $\langle u, x \rangle \in V \times \{0, 1, 2, 3\}$.

- Jeder Knoten soll mindestens eine Farbe haben: $F_u := C_{u,0} \vee C_{u,1} \vee C_{u,2} \vee C_{u,3}$ für $u \in V$.
- Jeder Knoten soll höchstens eine Farbe haben: $E_u = \bigwedge_{j<k<4} (C_{u,j} \to \neg C_{u,k})$ für $u \in V$;
- Endpunkte von Kanten sind unterschiedlich gefärbt: $K_{u,v} = \bigwedge_{j<4} \neg(C_{u,j} \wedge C_{v,j})$ sofern $\{u, v\} \in E$.

Δ_G bestehe aus all diesen Formeln. Eine erfüllende Belegung bestimmt eindeutig eine valide 4-Färbung.

Nach Konstruktion hat im endlichen Fall die Landkarte, bzw. der zugehörige planare Graph genau dann eine 4-Färbung, wenn Δ_G erfüllbar ist. Der 4-Farbensatz garantiert nun, dass Δ_G im planaren Fall immer erfüllbar ist.

(d) Ist der Graph G, bzw. die disjunkte Vereinigung $V + E$, unendlich, so gilt dies auch für die Menge Δ_G.

Um für eine endliche Teilmengen $\Phi \subseteq \Delta_G$ die Erfüllbarkeit zu zeigen, betrachte die endliche Menge $U \subseteq V$ aller Knoten (Länder), die in den Formeln von Φ als Index vorkommen. Der von diesen Knoten aufgespannte Teilgraph H von G entsteht durch Löschen aller Knoten aus $V - U$ im Graphen G, samt der mit diesen Knoten inzidenten Kanten.

Wir ergänzen nun Φ um alle fehlenden Formeln F_u, E_u und $K_{u,v}$, in denen Knoten aus H als Index vorkommen; die resultierende Menge $\Delta_H \supseteq \Phi$ ist immer noch endlich, und nach dem 4-Farbensatz erfüllbar. Damit ist auch die Teilmenge Φ erfüllbar.

Aufgrund des Kompaktheitssatz ist dann auch auch Δ_G erfüllbar.

Hausaufgabe 5 [11 PUNKTE]

(a) Weisen Sie die Allgemeingültigkeit der folgenden Formeln nach, die uns im Hilbert-Kalkül wieder begegnen werden: (Denken Sie an die Regeln zur Klammer-Vereinfachung!)

- [2 PUNKTE] $B \to A \to B$
- [3 PUNKTE] $(A \to B \to C) \to (A \to B) \to (A \to C)$
- [2 PUNKTE] $(\neg B \to \neg A) \to A \to B$

Jede korrekte Lösung, die ohne Tabelle auskommt, erhält [2 SONDERPUNKTE]

(b) [4 PUNKTE] Untersuchen Sie, ob Substitutions-Operationen der Form $[p/B]$ Allgemeingültigkeit bewahren, d.h., ist mit A immer auch $A[p/B]$ allgemeingültig?

Lösungsvorschlag:

(a) Es handelt sich um die Axiome des Hilbert-Kalküls (mit einem Paar überflüssiger Klammern). Nachfolgend betrachten wir der Übersichtlichkeit halber die vollständig geklammerten Formeln, und eine gegebene Belegung $\varphi \in \mathbb{B}^{\mathcal{A}}$. Beachte, dass $\widehat{\varphi}(F \to G) = 1$ zu $\widehat{\varphi}(F) \leq \widehat{\varphi}(G)$ äquivalent ist.

- $H_1 := B \to (A \to B)$:

$$\begin{aligned} 0 = \widehat{\varphi}(B) \leq \widehat{\varphi}(A \to B) &\quad \text{impliziert} \quad \widehat{\varphi}(H_1) = 1 \\ 1 = \widehat{\varphi}(B) = \widehat{\varphi}(A \to B) &\quad \text{impliziert} \quad \widehat{\varphi}(H_1) = 1 \end{aligned}$$

- $H_2 := (A \to (B \to C)) \to \big((A \to B) \to (A \to C)\big)$:

$$\begin{aligned} &0 = \widehat{\varphi}(A) \quad \text{impliziert} \quad \widehat{\varphi}(A \to (B \to C)) = 1 = \widehat{\varphi}(H_2) \\ &1 = \widehat{\varphi}(A) = \widehat{\varphi}(B \to C) \quad \text{impliziert} \quad \widehat{\varphi}((A \to B) \to (A \to C)) = 1 = \widehat{\varphi}(H_2) \\ &1 = \widehat{\varphi}(A) \neq \widehat{\varphi}(B \to C) \quad \text{impliziert} \quad \widehat{\varphi}(A \to (B \to C) = 0 \quad \text{impliziert} \quad \widehat{\varphi}(H_2) = 1 \end{aligned}$$

- $H_3 := (\neg B \to \neg A) \to A \to B$:

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}(A) \leq \widehat{\varphi}(B) \text{ gdw. } \widehat{\varphi}(\neg B) \leq \widehat{\varphi}(\neg A) \quad &\text{impliziert} \quad \widehat{\varphi}(\neg B \to \neg A) = \widehat{\varphi}(A \to B) \\ &\text{impliziert} \quad \widehat{\varphi}(H_3) = 1 \end{aligned}$$

(b) Der Effekt der Substitution $[p/B]$ auf Syntaxbäumen besteht im Ersetzen aller Blätter mit Label p durch den Syntaxbaum von B.

Betrachte nun die Wahrheitstablle für A, bzw. die Boole'sche Funktion $\boldsymbol{e}_A$ (vergl. Beispiel auf Folie 44). A ist genau dann allgemeingültig, wenn die Spalte unter dem Hauptjunktor (Wurzel des Syntaxbaums) nur aus **Einsen** besteht; d.h., $\widehat{\varphi}(A)$ ist unabhängig vom Wert der vorkommenden Atome.

Nun substituieren wir *in dieser Tabelle* p mit dem Namen der potentiellen Teilformel B von $A[p/B]$. **Achtung**: Dies ist nicht die Tabelle für $\boldsymbol{e}_{A[p/B]}$, denn diese Formel könnte zusätzliche Atome enthalten.

Aber: Aus demselben Grund, aus dem $\widehat{\varphi}(A) = 1$ unabhängig von $\varphi(p)$ ist, muß $\widehat{\varphi}(A[p/B])$ unabhängig von $\widehat{\varphi}(B)$ sein. Dieses Argument funktioniert auch, wenn A unerfüllbar ist, aber sonst nicht. Insbesondere steht zu vermuten, das für jedes Atom p und jede Formel B, die nicht zu p äquivalent ist, eine Formel A und zwei Belegungen φ und ψ existieren mit

$$\widehat{\varphi}(A) = \widehat{\varphi}(A[p/B]) \quad \text{und} \quad \widehat{\psi}(A) \neq \widehat{\psi}(A[p/B])$$

Hausaufgabe 6 [14 PUNKTE]

Die ursprüngliche Junktorenmenge $\mathcal{J}$ ist redundant; wie man leicht sieht, lassen sich etwa die Junktoren $\wedge$ und $\to$ mit Hilfe von $\neg$ und $\vee$ ausdrücken.

Terminologie: eine Junktormenge $\mathcal{J}'$ mit gegebener Semantik (d.h., vorgegebenen Wahrheitstabellen für jeden Junktor in $\mathcal{J}'$) heißt *vollständig*, wenn zu jeder Formel $A \in \mathcal{F}[\mathcal{A}]$ eine äquivalente Formel $B \in \mathcal{F}'[\mathcal{A}]$ existiert, und umgekehrt.

1. [5 PUNKTE] Zeigen Sie mittels stuktureller Induktion: $\mathcal{J}' = \{\neg, \vee\}$ ist vollständig.
2. [3 PUNKTE] Zeigen Sie, dass $\{\wedge, \vee\}$ nicht vollständig ist. Hinweis, finden Sie einen Junktor in $\mathcal{J}$, der nicht durch $\wedge$ und $\vee$ ausgedrückt werden kann.
3. [6 PUNKTE] Weisen Sie nach, dass genau zwei der 16 möglichen binären Junktoren die Eigenschaft haben, dass die entsprechende 1-elementige Junktormenge vollständig ist. Begründen Sie Ihre Antwort!

Lösungsvorschlag:

1. Nachzuweisen ist, dass jede Formel $A \in \boldsymbol{Term}(\mathcal{J}, \mathcal{A})$ zu einer Formel $A' \in \boldsymbol{Term}(\mathcal{J}', \mathcal{A})$ äquivalent ist.
   - $\bot \mathrel{\text{⟚}} p \wedge \neg p$ und $\top \mathrel{\text{⟚}} p \vee \neg p$ für jedes $p \in \mathcal{A}$.
   - $A \wedge B \mathrel{\text{⟚}} \neg(\neg A \vee \neg B) \mathrel{\text{⟚}} \neg(\neg A' \vee \neg B')$ nach den deMorganschen Regeln.
   - $A \to B \mathrel{\text{⟚}} \neg A \vee B \mathrel{\text{⟚}} \neg A' \vee B'$ notfalls per Wahrheitstabelle.
   - $A \leftrightarrow B \mathrel{\text{⟚}} (A \to B) \wedge (B \to A) \mathrel{\text{⟚}} (A' \to B') \wedge (B' \to A')$, und dies läßt sich aufgrund der vorigen Ergebnisse durch $\neg$ und $\vee$ ausdrücken.
2. $\neg$ läßt sich nicht durch $\wedge$ und $\vee$ ausdrücken: $\neg$ nimmt nur ein Argument, eine Simulation mittels $\wedge$ und $\vee$ darf das auch mehrfach verwenden. Aber $\wedge$ und $\vee$ bilden sowohl $\langle 0, 0\rangle$ auf 0 und $\langle 1, 1\rangle$ auf 1 ab.

   Alternativ: Gemäß Folie 63 ist jede Formel in $\boldsymbol{Term}(\{\wedge, \vee\}, \mathcal{A})$ konstant (s.o.), also ist nach dem Post'schen Vollständigkeitssatz $\{\wedge, \vee\}$ nicht vollständig.
3. Betrachte man einen binären Junktors $@$ als Boole'sche Funktion $\mathbb{B}^2 \xrightarrow{@} \mathbb{B}$, so gibt es 4 mögliche Argumente, also $2^4 = 16$ solche Funktionen.

   All diejenigen Boole'schen Funktionen, die $\langle 0, 0\rangle$ auf 0, oder $\langle 1, 1\rangle$ auf 1 abbilden, sind für die Nachbildung von $\neg$ ungeeignet (s.o.). Damit verbleiben noch 4 Kandidaten: neben der Negationen von $\wedge$ (auch bekannt als "'nand"') mit dem Symbol $\uparrow$, und der Negation von $\vee$ mit dem Symbol $\downarrow$, noch die Negationen der Projektionen auf die erste bzw. zweite Komponente. Da letztere eines der beiden Argumente ignorieren, lässt sich damit aber weder $\wedge$, noch $\vee$ oder $\to$ nachbilden.

   Es bleibt zu zeigen, dass $\uparrow$ und $\downarrow$ wirklich vollständig sind. Dabei nutzen wir aus, dass nach Teil 1 $\{\neg, \vee\}$ vollständig ist.

   $$\neg A \mathrel{\text{⟚}} \neg(A \wedge A) = A \uparrow A \quad \text{und} \quad A \vee B \mathrel{\text{⟚}} \neg(\neg A \wedge \neg B) \mathrel{\text{⟚}} (\neg A) \uparrow (\neg B) \mathrel{\text{⟚}} (A \uparrow A) \uparrow (B \uparrow B)$$

   $$\neg A \mathrel{\text{⟚}} \neg(A \vee A) = A \downarrow A \quad \text{und} \quad A \vee B \mathrel{\text{⟚}} \neg\neg(A \vee B) \mathrel{\text{⟚}} \neg(A \downarrow B) \mathrel{\text{⟚}} (A \downarrow B) \downarrow (B \downarrow B)$$