Technische Universität Braunschweig

TCS

Dr. Jürgen Koslowski

Einführung in die Logik

Aufgabenblatt 2, 2022-05-16

Wir wollen vereinbaren, bei Ableitungen in $\mathcal{K}_0$ bzw. $\mathcal{K}_{\text{nat}}$ *keine* semantischen Vereinfachungen der Prämissen oder anderer sich ergebender Formeln vorzunehmen.

Präsenzaufgabe 1

1. Geben Sie im deduktiven System $\mathcal{K}_{\text{Ar}}$ eine explizite Herleitung für -42 an.
2. Geben Sie im deduktiven System $\mathcal{K}_{\text{Ar}}$ einen Herleitungsbaum für 83 an. Hinweis: Sie dürfen auf bekannte Teilbäume zurückgreifen und müssen nicht alle Knoten explizit aufzeichnen.
3. Weisen Sie explizit nach, dass jedes deduktive System $\mathcal{K}$ vermöge
$$\Gamma^{\vdash_{\mathcal{K}}} := \{ A \in \mathcal{F} : \Gamma \vdash_{\mathcal{K}} A \}$$
einen Hüllenoperator auf der Potenzmenge von $\mathcal{F}$ definiert.

Lösungsvorschlag:

1.

0. 1	(Axiom)
1. 0	$(-), 0, 0$
2. -1	$(-), 1, 0$
3. -2	$(-), 2, 0$
4. 4	$(\times), 3, 3$
5. -6	$(-), 3, 4$
6. 36	$(\times), 5, 5$
7. -42	$(-), 5, 6.$

2.
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{0 \quad -42}{42}\,(-) \qquad -42}{84}\,(-) \qquad \dfrac{}{1}\,(1)}{83}\,(-)$$

Im Prinzip haben wir Bäume für -42, die hier zu ergänzen wären.

3. Die Monotonie ist trivial: wenn $\Gamma \subseteq \Delta$, so sind alle Ableitungen aus Γ auch Ableitungen aus Δ.

   Für jedes $B \in \Gamma$ ist (B) eine Ableitung, damit ist der Operator extensiv.

   Idempotenz: Jede Ableitung aus $\Gamma^{\vdash_{\mathcal{K}}}$ läßt sich zu einer Ableitung aus Γ erweitern, indem man für alle Komponenten B, die zu $\Gamma^{\vdash_{\mathcal{K}}} - \Gamma$ gehören, eine entsprechende Ableitung $\langle C_i : i < n \rangle$ aus Γ auswählt (also $C_{n-1} = B$), und all deren Komponenten C_i, $i < n-1$ vorne an die Ableitung aus $\Gamma^{\vdash_{\mathcal{K}}}$ anfügt.

Präsenzaufgabe 2

Wir modifizieren $\mathcal{K}_0$, indem wir Schema Ax3 aus $\mathcal{R}_0$ entfernen, und stattdessen die Schemata

$$\frac{}{\neg\neg A \to A}\ (\text{Th2}) \quad \text{sowie} \quad \frac{}{(A \to B) \to (A \to \neg B) \to \neg A}\ (\text{Th7})$$

hinzufügen. Zeigen Sie, dass auch der resultierende Kalkül $\mathcal{K}_0'$ vollständig und korrekt ist.

Lösungsvorschlag:

Alle Axiome von $\mathcal{K}_0'$ sind in $\mathcal{K}_0$ herleitbar.

Für die umgekehrte Richtung genügt es zu zeigen, dass (Ax3) in $\mathcal{K}_0'$ herleitbar ist. Leider beruhen die Herleitungen von (Th3), (Th4), (Th5), (Th6) und (Th8) in $\mathcal{K}_0$ direkt oder mittelbar auf (Ax3), können also zunächst in $\mathcal{K}_0'$ nicht verwendet werden.

Andererseits beruht der Beweis des Deduktionstheorems für $\mathcal{K}_0$ nur auf (Ax2) und auf (Th1), und der Beweis von (Th1) verwendet (Ax3) nicht. Damit steht das Deduktionstheorem auch in $\mathcal{K}_0'$ zur Verfügung.

0.	$\neg B \to \neg A$	Ann.
1.	A	Ann.
2.	$A \to \neg B \to A$	Ax1
3.	$\neg B \to A$	MP, 1,2
4.	$(\neg B \to A) \to (\neg B \to \neg A) \to \neg\neg B$	Th7
5.	$(\neg B \to \neg A) \to \neg\neg B$	MP, 3,4
6.	$\neg\neg B$	MP, 0,5
7.	B	Th2
8.	$A \to B$	DT, 1–7
9.	$(\neg B \to \neg A) \to A \to B$	DT, 0–8

Präsenzaufgabe 3

Donald Duck will seine Neffen Tick, Trick und Track zum Bierholen in den Supermarkt schicken. Das stößt allerdings auf wenig Begeisterung:

Tick: Ich habe keine Zeit, ich muss Hausaufgaben machen.
Trick: Ich will nicht allein gehen.
Track: Ich gehe nur, wenn auch Tick mitkommt.

Zeigen Sie mittels natürlicher Deduktion, dass Donald heute nüchtern bleibt.

Lösungsvorschlag:

Atomare Aussagen: A: Tik geht mit, B: Trick geht mit, C Track geht mit

Aussagen der Neffen: Tick $\neg A$; Trick $B \to (A \vee C)$; Track $C \to A$

Um die Konjunktion $\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C$ aus diesen Prämissen herzuleiten, genügt es, die Formeln $\neg A$, $\neg B$ und $\neg C$ zu erzeugen, die dann mit $(\wedge\, i)$ zu verknüpfen sind. Eine der gesuchten Formeln gehört bereits zu den Prämissen.

0.	$\neg A$	Prämisse
1.	$B \to (A \vee C)$	Prämisse
2.	$C \to A$	Prämisse
3.	C	Ann.
4.	A	$(\to e)$, 3,4
5.	$\perp$	$(\neg e)$, 1,5
6.	$\neg C$	$(\neg i)$, 4-6
7.	B	Ann.
8.	$A \vee C$	$(\to e)$, 2,8
9.	A	Ann.
10.	C	Ann.
11.	A	$(\to e)$, 3,11
12.	A	$(\vee e)$, 8,0–9,10-11
13.	$\perp$	$(\neg e)$, 0,12
14.	$\neg B$	$(\neg i)$, 7–13
15.	$\neg A \wedge \neg B$	$(\wedge i)$, 10,14
16.	$\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C$	$(\wedge i)$, 6,15

Hausaufgabe 4 [15 PUNKTE]

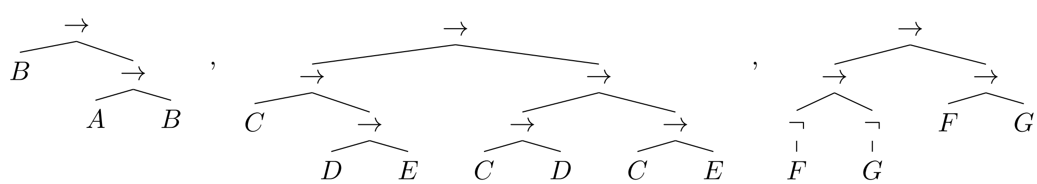
1. [6 PUNKTE] Zeigen Sie, dass im deduktiven System $\mathcal{K}_0$ die durch Axiom-Schemata Ax1, Ax2 und Ax3 beschriebenen Formelmengen disjunkt sind.
2. [5 PUNKTE] Zeigen Sie, dass $\mathcal{K}_0$ im folgenden Sinne *korrekt* ist: alle Theoreme von $\mathcal{K}_0$ sind Tautologien. Hinweis: Beachten Sie Aufgabe 5 von Blatt 1.
3. [4 PUNKTE] Zeigen Sie: Γ (in den Junktoren $\neg$ und $\to$) ist genau dann widersprüchlich, wenn Γ eine endliche widersprüchliche Teilmenge besitzt.

Lösungsvorschlag:

1. Hier geht es um Syntax. Die Frage ist, ob man in den drei Schemata die "‘Formel-Variablen"’ A, B und C so instanziieren kann, dass sich Überschneidungen ergeben.

   Wir betrachten die Syntaxbäume mit jeweils neuen Variablennamen:

   Ax1 Ax2 Ax3

   Um mit Hilfe von Ax1 eine Formel gemäß Ax2 nachzubauen, wäre $A = C \to D$ und $B = C \to E$ zu verlangen, sowie $B = C \to (D \to E)$, was zu $E = D \to E$ führt, was für endliche Formeln unmöglich ist.

   Mit Hilfe von Ax2 läßt sich keine Formel mit zwei Negationen in Level 2 von oben realisieren, also auch keine Formel gemäß Ax3.

   Um mit Hilfe von Ax1 eine Formel gemäß Ax3 nachzubauen, wäre $A = F$ und $B = G$ zu verlangen, sowie $G = \neg F \to \neg G$, was für endliche Formeln wieder unmöglich ist.

2. Die Theoreme sind genau die in $\mathcal{K}_0$ aus den Axiomen herleitbaren Formeln. Gemäß Aufgabe 5 Auf Blatt 1 sind alle Instanzen der Axiome-Schemata allgemeingültig. Aufgrund des semantischen Deduktionstheorems

$$\Gamma \cup \{B\} \models A \quad \text{gdw} \quad \Gamma \models B \to A$$

erhält die einzige Schußregel (MP) die Allgemeingültigkeit. Damit ist jede Zeile einer expliziten nicht hybriden $\mathcal{K}_0$-Herleitung eine Tautologie. (Die Anwendung des (DT) in hybriden Herleitungen diente ausschließlich zum Abkürzen von Beweisen, lieferte aber keine neuen Beweise, die ohne (DT) nicht möglich gewesen wären.)

3. Konsequenz des syntaktischen Kompaktheitssatzes: Ist Γ widersprüchlich, existiert eine Formel B mit $\Gamma \vdash B$ und $\Gamma \vdash \neg B$. Damit gibt es endliche Teilmengen $\Gamma_i \subseteq \Gamma$, $i < 2$ mit $\Gamma_0 \vdash B$ und $\Gamma_1 \vdash \neg B$. Folglich ist die endliche Menge $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \subseteq \Gamma$ widersprüchlich.

   Die andere Richtung ist trivial, weil mit einer widersprüchlichen Menge auch jede Obermenge widersprüchlich ist.

Hausaufgabe 5 [22 PUNKTE]

Bestimmen sie explizite hybride Ableitungen im Kalkül $\mathcal{K}_0$ von

1. [4 PUNKTE] $(A \to B) \to C \vdash B \to C$
2. [8 PUNKTE] $A \to (B \to C) \vdash \neg C \to (B \to \neg A)$
3. [10 SONDERPUNKTE] $\vdash \neg(A \to \neg B) \to A$

Lösungsvorschlag:

(1)

0.	$(A \to B) \to C$	Ann.
1.	B	Ann.
2.	$B \to A \to B$	Ax1
3.	$A \to B$	MP, 1,2
4.	C	MP, 3,0
5.	$B \to C$	DT, 1–4

(2)

1.	$A \to B \to C$	Prä.
2.	$\neg C$	Ann.
3.	B	Ann.
4.	A	Ann.
5.	$B \to C$	MP, 4,1
6.	C	MP, 3,5
7.	$A \to C$	DT, 4–6
8.	$(A \to C) \to (\neg C \to \neg A)$	Th5
9.	$\neg C \to \neg A$	MP. 7,8
10.	$\neg A$	MP 2,9
11.	$B \to \neg A$	DT, 3–10
12.	$\neg C \to (B \to \neg A)$	DT, 2-11

(3)

0.	$\neg(A \to \neg B)$	Ann.
1.	$\neg(A \to \neg B) \to (A \to \neg B) \to A$	Th3
2.	$(A \to \neg B) \to A$	MP, 0,1
3.	$\neg A$	Ann.
4.	$\neg A \to A \to \neg B$	Th3
5.	$A \to \neg B$	MP, 3,4
6.	A	MP, 5,2
7.	$\neg A \to A$	DT 3–6
8.	$\neg A \to \neg A$	Th1
9.	$(\neg A \to A) \to (\neg A \to \neg A) \to \neg\neg A$	Th7
10.	$(\neg A \to \neg A) \to \neg\neg A$	MP, 7,9
11.	$\neg\neg A$	MP, 8,10
12.	$\neg\neg A \to A$	Th2
13.	A	MP, 11, 12
14.	$\neg(A \to \neg B) \to A$	DT, 0–13

Hausaufgabe 6 [10 PUNKTE]

Weisen Sie die folgenden Rechenregeln in $\mathcal{K}_{\text{nat}}$ nach.

1. [5 PUNKTE] $A \Vdash \neg B \to \neg(A \to B)$
2. [5 PUNKTE] $\{B \to A, \neg B \to A\} \Vdash A$

Lösungsvorschlag:

1.

0.	A	Prämisse
1.	$\neg B$	Ann.
2.	$A \to B$	Ann.
3.	B	$(\to e)$, 0,2
4.	$\bot$	$(\neg\, e)$, 1,3
5.	$\neg(A \to B)$	$(\neg\, i)$, 2–4
6.	$\neg B \to \neg(A \to B)$	$(\to i)$, 1–5

2.

0.	$B \to A$	Prämisse
1.	$\neg B \to A$	Prämisse
2.	$B \vee \neg B$	Satz
3.	B	Ann.
4.	A	$(\to e)$, 3,0
5.	$\neg B$	Ann.
6.	A	$(\to e)$, 5,1
7.	A	$(\vee\, e)$, 2, 3–4, 5–6