Technische Universität Braunschweig

TCS

Dr. Jürgen Koslowski

Einführung in die Logik

Aufgabenblatt 3, 2022-05-30

Wir wollen vereinbaren, bei Ableitungen in $\mathcal{K}_0$ bzw. $\mathcal{K}_{\mathrm{nat}}$ *keine* semantischen Vereinfachungen der Prämissen oder anderer sich ergebender Formeln vorzunehmen.

Präsenzaufgabe 1

Die *Inkonsistenzregel* auf Folie 88 besagt: $\Gamma \cup \{A\}$ ist genau dann inkonsistent, d.h., erlaubt sich widersprechende Schlußfolgerungen, wenn $\Gamma \vdash \neg A$. Analog zum Deduktionstheorem (DT) kann man mit dieser Regel (IK) Ableitungen im Hilbert-Kalkül $\mathcal{K}_0$ verkürzen, bzw. Rückgriffe auf die Tautologie-Schemata (Th1)–(Th8) reduzieren. Dazu erlauben wir die Verwendung des Symbols $\perp$ um anzuzeigen, dass eine Inkonsistenz auf dem aktuellen Schachtelungslevel vorliegt, den man damit abschließt, um mit der Negation seiner Annahme fortzufahren.

Zur Demonstration zeigen wir: $\vdash \neg(A \to B) \to \neg B$.

Lösungsvorschlag:

0.	$\neg(A \to B)$	Ann.
1.	B	Ann.
2.	$B \to A \to B$	Ax1
3.	$A \to B$	MP, 1,2
4.	$\perp$	0,3
5.	$\neg B$	IK, 1–4
6.	$\neg(A \to B) \to \neg B$	DT, 0–5

Präsenzaufgabe 2

Wenden Sie die Tableau-Methode an, um folgende Behauptungen zu überprüfen:

(a) $A \wedge \neg B \vdash_\tau \neg(\neg A \wedge \neg B)$

(b) $A \wedge (A \to B) \vdash_\tau B$

(c) $A \to B \to C \vdash_\tau (A \to B) \to A \to C$

Lösungsvorschlag:

Wir instanziieren die Formelvariablen A, B und C mit den Atomen p, q r, andernfalls kann man nicht von Literalen sprechen.

(a) $p \wedge \neg q \vdash_\tau \neg(\neg p \wedge \neg q)$: wir überprüfen $\Gamma = \{p \wedge \neg q, \neg p \wedge \neg q\}$ auf Erfüllbarkeit.

- $\star\ p \wedge \neg q \quad 1$
  - $\star\ \neg p \wedge \neg q \quad 0$
    - $0a\ \ p$
      - $0b\ \ \neg q$
        - $1a\ \ \neg p$

(b) $p \wedge (p \to q) \vdash_\tau q$: wir überprüfen $\Gamma = \{p \wedge (p \to q), \neg q\}$ auf Erfüllbarkeit.

- $\star\ p \wedge (p \to q) \quad 0$
  - $\star\ \neg q$
    - $0a\ \ p$
      - $0b\ \ p \to q \quad 1$
        - $1a\ \ \neg p$
        - $1b\ \ q$

(c) $p \to q \to r \vdash_\tau (p \to q) \to p \to r$: wir überprüfen $\Gamma = \{p \to q \to r, (p \to q) \wedge \neg(p \to r)\}$ auf Erfüllbarkeit.

- $\star\ p \to (q \to r) \quad 3$
  - $\star\ (p \to q) \wedge \neg(p \to r) \quad 0$
    - $0a\ \ p \to q \quad 2$
      - $0b\ \ \neg(p \to r) \quad 1$
        - $1a\ \ p$
          - $1b\ \ \neg r$
            - $2a\ \ \neg p$
            - $2b\ \ q$
              - $3a\ \ \neg p$
              - $3b\ \ q \to r \quad 4$
                - $4a\ \ \neg q$
                - $4b\ \ r$

Präsenzaufgabe 3

Geben Sie eine Herleitung in Gentzens Sequenzen-Kalkül von $\neg A \vee B \vdash A \to B$ in zunächst Baumform, dann als vertikale nummerierte Liste mit Begründungen, einschließlich der strukturellen Regeln.

Lösungsvorschlag:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash B, A}\ (\textsc{ax})}{A, \neg A \vdash B}\ (\neg L) \qquad \dfrac{}{A, B \vdash B}\ (\textsc{ax})}{A, \neg A \vee B \vdash B}\ (\vee L)}{\neg A \vee B, A \vdash B}\ (\text{x-}L)}{\neg A \vee B \vdash A \to B}\ (\to R)$$

0.	$A \vdash B, A$	($\textsc{ax}$)
1.	$A, \neg A \vdash B$	$(\neg L)$, 0
2.	$A, B \vdash B$	($\textsc{ax}$)
3.	$A, \neg A \vee B \vdash B$	$(\vee L)$, 1,2
4.	$\neg A \vee B, A \vdash B$	(x-L),3
5.	$\neg A \vee B \vdash A \to B$	$(\to R)$, 4

Hausaufgabe 4 [10 PUNKTE]

Leiten Sie $\vdash \neg(A \to A) \to (A \to B)$ im Hilbert-Kalkül her

(a) [4 PUNKTE] ohne Verwendung von (DT) und (IK);

(b) [4 PUNKTE] mit Verwendung von (DT) und (IK)

[2 PUNKTE] und zählen Sie die Anzahl der Schritte, wenn alle Anwendungen der Tautologie-Schemata (Th1)–(Th8) durch ihre Herleitungen aus der VL ersetzt würden.

Lösungsvorschlag:

(a)

0.	$A \to A$	Th1
1.	$(A \to A) \to \neg\neg(A \to A)$	Th4
2.	$\neg\neg(A \to A)$	MP, 0,1
3.	$\neg\neg(A \to A) \to \neg(A \to A) \to (A \to B)$	Th3
4.	$\neg(A \to A) \to (A \to B)$	MP, 2,3

(Th1) benötigt 5 Schritte;
(Th3) benötigt 6 Schritte;
(Th4) benötigt 3 Schritte, von denen einer (Th2) mit 9 Schritten ist.

insgesamt: 24 Schritte.

(b)

0.	$\neg(A \to A)$	Ann.
1.	$\neg(A \to B)$	Ann.
2.	$A \to A$	Th1
3.	$\bot$	0,2
4.	$\neg\neg(A \to B)$	IK, 1–3
5.	$\neg\neg(A \to B) \to (A \to B)$	Th2
6.	$(A \to B)$	MP, 4,5
7.	$\neg(A \to A) \to (A \to B)$	DT, 0–4

(Th1) benötigt 5 Schritte;
(Th2) benötigt 9 Schritte;

insgesamt 20 Schritte.

(Die Diskrepanz wird größer, wenn man $\vdash \neg(A \to A) \to \neg(A \to B)$, was leider aufgrund eines Tippfehlers nicht in der Aufgabe stand: in (a) ändert sich die Schrittzahl nicht, in (b) kann auf die Anwendung von (Th2) und den anschließenden Modus Ponens verzichtet werden, und man braucht nur noch 10 Schritte.)

Hausaufgabe 5 [12 PUNKTE]

In der VL haben wir gesehen, dass der Hilbert-Kalkül $\mathcal{K}_0$ vollständig ist, sich also jede Tautologie herleiten oder beweisen lässt. Wir betrachten nun einen Kalkül, der nicht vollständig ist:

$\mathcal{K} = \langle \mathcal{F}_0, R \rangle$ entsteht aus $\mathcal{K}_0$, indem man die Axiom-Schemata (Ax1) und (Ax2) verwirft; es bleiben also nur noch das Axiom-Schema (Ax3) und die Schlußregel (MP) übrig.

(1) [8 PUNKTE] Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass die Anzahl der Vorkommen eines jeden Atoms p in jeder Komponente B_i eines $\mathcal{K}$-Beweises $\langle B_i : i \leq n \rangle$ von $\vdash B_n$ gerade ist.

(2) [4 PUNKTE] Schließen Sie daraus, dass in $\mathcal{K}$ nicht jede Tautologie herleitbar ist.

Lösungsvorschlag:

(1) Jede Komponenten einer Herleitung der Form $\langle B_i : i \leq n \rangle$ von $\vdash B_n$ benötigt eine bestimmte Anzahl von Anwendungen von (MP). Unsere Induktion läuft über diese Anzahl m und alle möglichen Herleitungen (Beweise).

$m = 0$: eine Komponente B_i einer Herleitung, die keine Anwendung von (MP) erfordert, muss eine Instanz von (Ax3) sein. Hier diese gilt die Behauptung, da A und B je zweimal auftreten.

Für $m > 0$ nehmen wir an, die Behauptung gilt für alle $j < m$.

Betrachte eine Komponente B_i einer Herleitung, die aus genau m Anwendungen von (MP) entstanden ist. Die beiden Vorgängerkomponenten A und $A \to B_i$ derselben Herleitung haben dann zusammen $m-1$ Anwendungen von (MP) benötigt, enthalten also beide jeweils eine gerade Anzahl jedes vorkommenden Atoms p. Das Entfernen von A aus $A \to B_i$ reduziert die Anzahl jedes der in A vorkommenden Atome um eine gerade Zahl, also bleibt auch die Anzahl jedes der verbliebenen Atome gerade.

(2) Die Absorbtionsregel $A \,\vDash\!\!\!\!\dashv\, A \vee (A \wedge B)$ liefert die Tautologien

$$p \to p \vee (p \wedge q)$$
$$p \to \neg p \to \neg(\neg p \vee \neg q)$$
$$p \to \neg p \to \neg(p \to \neg q)$$

welche die gewünschte Bedingung nicht erfüllen.

Hausaufgabe 6 [16 PUNKTE]

Zeigen Sie folgende Aussagen im Gentzen-Sequenzenkalkül. Entwickeln Sie die Lösungen zunächst von unten nach oben in Baumform(!), bevor Sie die Schritte in eine vertikale durchnummerierte Liste mit Begründungen der einzelnen Zeilen überführen.

Achtung: Die Strategien für $\mathcal{K}_0$ und $\mathcal{K}_{\text{nat}}$ mit Hilfe geeigneter Annahmen relevante Teilformeln aus den Prämissen und der Schlußfolgerung zu extrahieren, sind hier nicht mehr anwendbar!

(1) [4 PUNKTE] $\neg(p \to q) \vdash q \to p$

(2) [4 PUNKTE] $\vdash (p \wedge q) \to p \vee r$

(3) [8 PUNKTE] $s \wedge r,\ r \to \neg(p \wedge q) \vdash \neg p,\ \neg q$

Lösungsvorschlag:

(1)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p,q \vdash p,q}\,(ax)}{q,p \vdash p,q}\,(\text{X-}L)}{q \vdash p, p \to q}\,(\to R)}{q, \neg(p \to q) \vdash p}\,(\neg L)}{\neg(p \to q), q \vdash p}\,(\text{X-}L)}{\neg(p \to q) \vdash q \to p}\,(\to R)$$

0.	$p, q \vdash p, q$	(AX)
1.	$q, p \vdash p, q$	(X-L)
2.	$q \vdash p, p \to q$	$(\to R), 1$
3.	$q, \neg(p \to q) \vdash p$	$(\neg L), 2$
4.	$\neg(p \to q), q \vdash p$	(X-L)
5.	$\neg(p \to q) \vdash q \to p$	$(\to R), 4$

(2)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{q,p \vdash r,p}\,(\text{AX})}{p,q \vdash r,p}\,(\text{X-}L)}{p,q \vdash p,r}\,(\text{X-}R)}{p,q \vdash p \vee r}\,(\vee R)}{p \wedge q \vdash p \vee r}\,(\wedge L)}{\vdash (p \wedge q) \to p \vee r}\,(\to R)$$

0.	$q, p \vdash r, p$	(AX)
1.	$p, q \vdash r, p$	(X-L)
2.	$p, q \vdash p, r$	(X-R)
3.	$p, q \vdash p \vee r$	$(\vee R), 2$
4.	$p \wedge q \vdash p \vee r$	$(\wedge L), 3$
5.	$\vdash (p \wedge q) \to p \vee r$	$(\to R), 4$

(3) (Im folgenden Baum sollen die Farben dabei helfen, die Teilformeln zu identifizieren, auf die die aktuelle Regel zugreift. Das funktioniert besser im rechten Teilbaum, wo Teilformeln nicht in aufeinanderfolgenden Schritten verwendet werden.)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{s, r \vdash \neg p, \neg q, r}\,(\text{AX})}{s \wedge r \vdash \neg p, \neg q, r}\,(\wedge L) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{s \wedge r, q, p \vdash p}\,(\text{AX}) \quad \dfrac{\dfrac{}{s \wedge r, p, q \vdash q}\,(\text{AX})}{s \wedge r, q, p \vdash q}\,(\text{X-}L)}{s \wedge r, q, p \vdash p \wedge q}\,(\wedge R)}{s \wedge r, q \vdash p \wedge q, \neg p}\,(\neg R)}{s \wedge r \vdash p \wedge q, \neg p, \neg q}\,(\neg R)}{s \wedge r \vdash \neg p, p \wedge q, \neg q}\,(\text{X-}R)}{s \wedge r \vdash \neg p, \neg q, p \wedge q}\,(\text{X-}R)}{s \wedge r, \neg(p \wedge q) \vdash \neg p, \neg q}\,(\neg L)}{s \wedge r, r \to \neg(p \wedge q) \vdash \neg p, \neg q}\,(\to L)$$

0.	$s, r \vdash \neg p, \neg q, r$	(AX)
1.	$s \wedge r \vdash \neg p, \neg q, r$	$(\wedge L), 0$
2.	$s \wedge r, q, p \vdash p$	(AX)
3.	$s \wedge r, p, q \vdash q$	(AX)
4.	$s \wedge r, q, p \vdash q$	(X-L)
5.	$s \wedge r, q, p \vdash p \wedge q$	$(\wedge R), 3, 4$
6.	$s \wedge r, q \vdash p \wedge q, \neg p$	$(\neg R), 5$
7.	$s \wedge r \vdash p \wedge q, \neg p, \neg q$	$(\neg R), 6$
8.	$s \wedge r \vdash \neg p, p \wedge q, \neg q$	(X-L)$, 7$

$$
\begin{array}{rll}
9. & s \wedge r \vdash \neg p, \neg q, p \wedge q & (\text{x-}L), 8 \\
10. & s \wedge r, \neg(p \wedge q) \vdash \neg p, \neg q & (\neg\, L), 9 \\
11. & s \wedge r, r \to \neg(p \wedge q) \vdash \neg p, \neg q & (\to L), 1, 10
\end{array}
$$

Hausaufgabe 7 [22 PUNKTE]

Verwenden Sie Tableaus zum Nachweis, dass

1. $(p \to q) \to \neg q \to \neg p$ eine Tautologie ist;
2. $\big(p \to (q \wedge r)\big) \wedge (r \to \neg q) \wedge p$ unerfüllbar ist;
3. $(p \to q \to r) \wedge \neg\big(p \to q) \to p \to r$ unerfüllbar ist.

Lösungsvorschlag:

1.

$$
\begin{array}{ccc}
 & \star\ (p \to q) \to \neg q \to \neg p \quad 0 & \\
0a\ \ \neg(p \to q) \quad 1 & & 0b\ \ \neg q \to \neg p \quad 2 \\
| & & \begin{array}{cc} 2a\ \ q & 2b\ \ \neg p \end{array} \\
1a\ \ p & & \\
| & & \\
1b\ \ \neg q & &
\end{array}
$$

Man beachte, dass die Reihenfolge zwischen 1a und 1b willkürlich ist, und diese Formeln in derselben Knotenmenge liegen! Da keine Widersprüche auftreten, muß es sich bei der Ursprungsformel um eine Tautologie handeln.

Alternativ kann man die Unerfüllbarkeit von $\{p \to q, \neg(\neg q \to \neg p)\}$ zeigen:

$$
\begin{array}{c}
\star\ \ p \to q \quad 1 \\
| \\
\star\ \ \neg(\neg q \to \neg p) \quad 0 \\
| \\
0a\ \ \neg q \\
| \\
0b\ \ p \\
\begin{array}{cc} 1a\ \ {\color{red}\neg p} & 1b\ \ {\color{red}q} \end{array}
\end{array}
$$

2.

$$\star\ \ \big(p \to (q \wedge r)\big) \wedge (r \to \neg q) \wedge p \quad 0$$

$$0a\ \ p \to (q \wedge r) \quad 2$$

$$0b\ \ (r \to \neg q) \wedge p \quad 1$$

$$1a\ \ r \to \neg q \quad 4$$

$$1b\ \ p$$

$$2a\ \ \neg p \qquad\qquad 2b\ \ q \wedge r \quad 3$$

$$3a\ \ q$$

$$3b\ \ r$$

$$4a\ \ \neg r \qquad\qquad 4b\ \ \neg q$$

3. Leider scheint bei dieser Aufgabe ein Mißgeschick passiert zu sein: Die vorgeschlagene Eliminierung der letzten schließenden Klammer, macht die Formel erfüllbar.

$$\star\ \ (p \to q \to r) \wedge \neg(p \to q) \to p \to r \quad 0$$

$$0a\ \ \neg((p \to q \to r) \wedge \neg(p \to q)) \quad 2 \qquad\qquad 0b\ \ p \to r \quad 1$$

$$1a\ \ \neg p \qquad\qquad 1b\ \ r$$

Das passiert auch, wenn man eine öffnende Klammer vor der Negation einfügt. Aber eine öffnende Klammer nach der Negation liefert tatsächlich eine nicht erfüllbare Formel:

$$\star\ \ (p \to q \to r) \wedge \neg\big((p \to q) \to p \to r\big) \quad 0$$

$$0a\ \ p \to q \to r \quad 3$$

$$0b\ \ \neg\big((p \to q) \to p \to r\big) \quad 1$$

$$1a\ \ p \to q \quad 5$$

$$1b\ \ \neg(p \to r) \quad 2$$

$$2a\ \ p$$

$$2b\ \ \neg r$$

$$3a\ \ \neg p \qquad\qquad 3b\ \ q \to r \quad 4$$

$$4a\ \ \neg q \qquad\qquad 4b\ \ r$$

$$5a\ \ \neg p \qquad\qquad 5b\ \ q$$

Die folgenden Aufgaben beziehen sich auf Stoff der VL am 1. Juni.

Hausaufgabe 8 [10 PUNKTE]

(a) [4 PUNKTE] Untersuchen Sie mittels des Davis-Putnam-Verfahrens auf Erfüllbarkeit:

$$\neg p \land (\neg t \lor q \lor p) \land (\neg s \lor \neg q) \land (s \lor \neg q \lor t) \land (r \lor \neg p) \land \neg r \land (\neg s \lor \neg q \lor s)$$

(b) [2 PUNKTE] Warum ist es notwendig, dass die bearbeitete Formel im Davis-Putnam-Verfahren in Negationsnormalform ist? (D.h.: An welcher Stelle gibt das Verfahren sonst falsche Antworten?)

(c) [4 PUNKTE] Beweisen Sie den ersten Teil des Lemmas auf Folie 151: Für Klauseln $K \subseteq L$ (K subsumiert L) gilt: $K \mathrel{\models\!\!\!\!\dashv} K \land L$.

Lösungsvorschlag:

(a) Wir stellen zunächst fest, dass die letzte Klausel tautologisch und somit irrelevant ist und entfernt werden kann.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& \neg p \land (\neg t \lor q \lor p) \land (\neg s \lor \neg q) \land (s \lor \neg q \lor t) \land (r \lor \neg p) \land \neg r \arrow[d, "{[p/\bot]}"] & \\
& (\neg t \lor q) \land (\neg s \lor \neg q) \land (s \lor \neg q \lor t) \land \neg r \arrow[d, "{[r/\bot]}"] & \\
& (\neg t \lor q) \land (\neg s \lor \neg q) \land (s \lor \neg q \lor t) \arrow[dl, "{[t/\top]}"'] \arrow[dr, "{[t/\bot]}"] & \\
q \land (\neg s \lor \neg q) \arrow[d, "{[s/\bot]}"'] & & (\neg s \lor \neg q) \land (s \lor \neg q) \arrow[d, "{[q/\bot]}"] \\
q \arrow[d, "{[q/\top]}"'] & & \top \\
\top & &
\end{tikzcd}$$

(b) (Dieser Aufgabenteil hat mich etwas überrascht; der linke Ast des ersten Beispiels reicht für die Punkte.)

Behauptung: für jede Formel A , jedes Atom p und jede Belegung φ gilt

$$\widehat{\varphi}(A) = \begin{cases} \widehat{\varphi}(A[p/\top]) & \text{falls } \varphi(p) = 1 \\ \widehat{\varphi}(A[p/\bot]) & \text{falls } \varphi(p) = 0 \end{cases}$$

Dies ist klar für Atome A und folgt dann leicht mittels struktureller Induktion für allgemeine Formeln (bitte selber nachrechnen).

Das zeigt, dass die NNF-Bedingung im Lemma auf Folie 154 überflüssig ist. Insofern funktioniert das Verfahren für beliebige Formeln, sofern man solange einen streng binären Baum konstruiert, wie die zu bearbeitenden Formeln noch nicht in NNF vorliegen. Aber das ist praktisch genau so aufwändig, wie eine Wahrheitstabelle zu erstellen.

Was für allgemeine Formeln aber nicht mehr funktioniert sind die einfachen Regeln, wann eine binäre Aufspaltung vermieden werden kann, also die Unit- und die Pure-Literal Regel.

Beispiel:

$$\begin{tikzcd}
& \neg((p \lor q) \land (p \lor r)) \arrow[dl, "{[p/\top]}"'] \arrow[dr, "{[p/\bot]}"] & \\
\bot & & q \land r \arrow[d, "{[q/\top]}"] \\
& & r \arrow[d, "{[r/\top]}"] \\
& & \top
\end{tikzcd}$$

Nach der ursprünglichen Pure-Literal Regel ist aufgrund des nur positiv auftretenden Atoms p nur der linke Pfad zu betrachten, was eine falsche Antwort liefert.

Es sollte eigentlich genügen, dass jedes Auftreten des Atoms p im Einflußbereich einer geraden bzw. ungeraden Anzahl von Negationen steht:

$$\begin{tikzcd}
\neg((p \lor q) \land \neg(\neg p \lor \neg q)) \arrow[d, "{[p/\bot]}"] \\
\neg(q \land \neg\neg q) \arrow[d, "{[q/\bot]}"] \\
\top
\end{tikzcd}$$

(c) Inzwischen steht explizit im Skript, dass aus $K \subseteq L$ folgt $K \sqsubseteq L$. Das ist klar, denn L hat die Form $L = K \lor B$ (wobei B auch eine Klausel ist, aber das ist hier unerheblich), und jede Belegung φ erfüllt $\widehat{\varphi}(K) \leq \sup\{\widehat{\varphi}(K), \widehat{\varphi}(B)\} = \widehat{\varphi}(K \lor B)$. (Dies war in der Aufgabe nicht gefordert.)

Weiter erhalten wir mittels einer der Absortionsregeln

$$K \land L = K \land (K \lor B) \mathrel{\models\!\!\!\dashv} K$$

Hausaufgabe 9 [10 PUNKTE]

Bestimmen Sie jeweils eine Tseitin-Transformation in Mengenschreibweise:

1. [5 PUNKTE] $A = \big((p \lor q) \land r\big) \to \neg s$
2. [5 PUNKTE] $B = p \lor q \lor \neg r \to p \land \neg s$

Lösungsvorschlag:

1. $A \mathrel{\models\!\!\!\dashv} \neg\big((p \lor q) \land r\big) \lor \neg s$ hat zwei echte binäre Teilformeln:

$$t_0 \leftrightarrow p \lor q \qquad \text{und} \qquad t_1 \leftrightarrow t_0 \land r$$

Das liefert

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Tst}(A) := {} & \{\neg t_1, \neg s\} \\ & \{\neg p, q, \neg t_0\}, \{\neg p, t_0\}, \{\neg q, t_0\} \\ & \{\neg t_0, \neg r, t_1\}, \{t_0, \neg t_1\}, \{r, \neg t_1\} \in \mathsf{KNF} \end{aligned}$$

2. $B \coloneqq \neg(p \vee q \vee \neg r) \vee (p \wedge \neg s)$ hat zwei echte $\geq$ binäre Teilformeln:

$$t_0 \leftrightarrow p \vee q \vee \neg r \qquad \text{und} \qquad t_1 \leftrightarrow p \wedge \neg s$$

Das liefert

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Tst}(A) := &\{\neg t_0, t_1\} \\ &\{p, q, \neg r, \neg t_0\}, \{\neg p, t_0\}, \{\neg q, t_0\}, \{r, t_0\} \\ &\{\neg p, s, t_1\}, \{p, \neg t_1\}, \{\neg s, \neg t_1\} \in \mathsf{KNF} \end{aligned}$$