Einführung in die Logik

Aufgabenblatt 1, 2023-04-24

Präsenzaufgabe 1

Die Formelmenge $\mathcal{F}[\mathcal{A}]$ ist die kleinste Lösung einer Fixpunkt-Gleichung (vergl. Folie 38):

Die BNF für Formeln

$$\boldsymbol{F} ::= \mathcal{A} \mid \bot \mid \top \mid \neg\boldsymbol{F} \mid (\boldsymbol{F} \star \boldsymbol{F}) \quad \text{für } \star \text{ binär} \tag{$*$}$$

nimmt in konventioneller Mengenschreibweise folgende Form an:

$$\boldsymbol{F} = \mathcal{A} + \{\bot, \top\} + \neg\boldsymbol{F} + (\boldsymbol{F} \wedge \boldsymbol{F}) + (\boldsymbol{F} \vee \boldsymbol{F}) + (\boldsymbol{F} \to \boldsymbol{F}) + (\boldsymbol{F} \leftrightarrow \boldsymbol{F}) \tag{$**$}$$

Dabei ist $\boldsymbol{F}$ eine Variable, die Werte in der Potenzmenge von $\big(\mathcal{J}^{()}[\mathcal{A}]\big)^*$ annehmen kann, d.h., $\boldsymbol{F}$ ist eine unbestimmte Menge von (endlichen!) Wörtern über dem Alphabet $\mathcal{J}^{()}[\mathcal{A}]$ (zur Notation vergl. Folie 36).

Die rechte Seite von $(*)$ bzw. $(**)$ beschreibt eine Funktion

$$\boldsymbol{P}\Big(\big(\mathcal{J}^{()}[\mathcal{A}]\big)^*\Big) \xrightarrow{\Phi} \boldsymbol{P}\Big(\big(\mathcal{J}^{()}[\mathcal{A}]\big)^*\Big)$$

für die gemäß $(*)$ bzw. $(**)$ Fixpunkte $\boldsymbol{F}$ gesucht werden. Zeigen Sie

1. Φ erhält die Ordnung $\subseteq$ auf der Potenzmenge, d.h., aus $\boldsymbol{X} \subseteq \boldsymbol{Y}$ folgt $\Phi(\boldsymbol{X}) \subseteq \Phi(\boldsymbol{Y})$.
2. Ist die Menge $\big(\mathcal{J}^{()}[\mathcal{A}]\big)^*$ aller Wörter ein Fixpunkt für Φ?
3. Die Iteration $\boldsymbol{F}_0 = \emptyset$, $\boldsymbol{F}_{n+1} = \Phi(\boldsymbol{F}_n)$ liefert eine monoton wachsende Folge von Teilmengen von $\big(\mathcal{J}^{()}[\mathcal{A}]\big)^*$, d.h.,
$$\boldsymbol{F}_n \subseteq \boldsymbol{F}_{n+1} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$
4. Charakterisieren Sie die Elemente von $\boldsymbol{F}_n$, $n > 0$, möglichst einfach und prägnant und schließen Sie daraus $\boldsymbol{F}_\infty := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \boldsymbol{F}_n = \mathcal{F}_{()}[\mathcal{A}]$. [**Hinweis**: Wenn Sie möchten, dürfen Sie hier mit Syntaxbäumen argumentieren.]
5. $\boldsymbol{F}_\infty$ ist der kleinste Fixpunkt von Φ.

Lösungsvorschlag:

1. Falls $\boldsymbol{X} \subseteq \boldsymbol{Y}$ gilt
$$\neg\boldsymbol{X} = \{\neg W : W \in \boldsymbol{X}\} \subseteq \{\neg Z : Z \in \boldsymbol{Y}\} = \neg\boldsymbol{Y}$$
und für $\star$ binär
$$\boldsymbol{X} \star \boldsymbol{X} = \{W \star W' : W, W' \in \boldsymbol{X}\} \subseteq \{Z \star Z' : Z, Z' \in \boldsymbol{Y}\} = \boldsymbol{Y} \star \boldsymbol{Y}$$
2. Nein, denn die rechte Seite produziert z.B. keine Wörter,

- die mit einem binären Junktor oder einer schließenden Klammer beginnen;
- mit einem binären Junktor oder einer öffnenden Klammer enden;
- mit einer öffenenden Klammer beginnen, aber nicht mit einer schließenden Klammer enden;
- mit einer schließenden Klammer enden, aber nicht mit einer öffnenden Klammer beginnen.

Es genügt, ein einziges Wort außerhalb von $\Phi\left(\left(\mathcal{J}+\mathcal{A}+\{(,)\}\right)^*\right)$ anzugeben, z.B. $)p\neg(\wedge($.

3. Dies folgt wegen $\boldsymbol{F}_0 = \emptyset \subseteq \boldsymbol{F}_1 = \mathcal{A} \cup \{\bot, \top\}$ per Induktion sofort aus Teil 1.

4. Die Elemente aus $\boldsymbol{F}_n$ sind genau die aussagenlogischen Formeln, deren Syntaxbaum eine Tiefe $< n$ hat. Beweis durch vollständige Induktion:

   Anfang: Klar für $\boldsymbol{F}_0 = \emptyset$. Wir bemerken, dass die Syntaxbäume der Formeln in $\mathcal{A} \cup \{\bot, \top\}$ die Tiefe 0 haben und es keine weiteren solchen Formeln gibt.

   Annahme: Die Behauptung stimmt für $\boldsymbol{F}_k$.

   Schluss: Betrachte die Syntaxbäume der Elemente in $\boldsymbol{F}_{k+1} = \Phi(\boldsymbol{F}_k)$. Deren echte nichtleere Unterbäume haben eine Tiefe $< k$. Damit haben die Syntaxbäume der Elemente in $\boldsymbol{F}_{k+1}$ maximal die Tiefe k .

   Umgekehrt hat jede Formel A mit Syntaxbaum der Tiefe k mindestens einen echten Unterbaum der Tiefe $k-1$, daher gehören die Formeln aller echten Unterbäume zu $\boldsymbol{F}_k$, und folglich A zu $\boldsymbol{F}_{k+1} = \Phi(\boldsymbol{F}_k)$.

   Die Vereinigung enthält nun alle Formeln mit Syntaxbäumen endlicher Tiefe, also alle Formeln.

5. Offenbar gilt

$$\neg\boldsymbol{F}_\infty = \{\neg A \,:\, A \in \boldsymbol{F}_\infty\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{\neg A \,:\, A \in \boldsymbol{F}_n\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \neg\boldsymbol{F}_n$$

   Weiter behaupten wir

$$(\boldsymbol{F}_\infty \star \boldsymbol{F}_\infty) = \{A \star B \,:\, A, B \in \boldsymbol{F}_\infty\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{A \star B \,:\, A, B \in \boldsymbol{F}_n\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (\boldsymbol{F}_n \star \boldsymbol{F}_n)$$

   $(\subseteq)$ Für $A \star B \in (\boldsymbol{F}_\infty \star \boldsymbol{F}_\infty)$ existieren Zahlen $i, j \in \mathbb{N}$ mit $A \in \boldsymbol{F}_i$ und $B \in \boldsymbol{F}_j$. Setze $m := \max\{i, j\}$. Wegen Teil 3 gilt dann auch $A, B \in \boldsymbol{F}_m$, und folglich $(A \star B) \in (\boldsymbol{F}_m \star \boldsymbol{F}_m)$.

   $(\supseteq)$ Trivial.

   Zusammen folgt $\boldsymbol{F}_\infty = \Phi(\boldsymbol{F}_\infty)$, also ist $\boldsymbol{F}_\infty$ ein Fixpunkt.

   Ist $\boldsymbol{G} \subsetneq \boldsymbol{F}_\infty$ ein echt kleinerer Fixpunkt, betrachte eine Formel A in der Differenz $\boldsymbol{F}_\infty - \boldsymbol{G}$, deren Syntaxbaum minimale Tiefe hat. Alle echten Unterbäume von A sind aber in $\boldsymbol{G}$ enthalten, wegen $\boldsymbol{G} = \Phi(\boldsymbol{G})$ also auch A , Widerspruch. Damit ist $\boldsymbol{F}_\infty$ der kleinste Fixpunkt.

Präsenzaufgabe 2

Eine wichtige Anwendung des Kompaktheitssatzes

Ein (potentiell unendlicher) *Baum* besteht aus

- einer *Knotenmenge* $T = \sum_{n\in\mathbb{N}} T_n$, mit $T_0 = \{r\}$; der spezielle Knoten r heist *Wurzel*;
- einer *Vorgängerfunktion* $\boldsymbol{pre} : T - T_0 \longrightarrow T$, die jedem Knoten $t \in T_{n+1}$ seinen Vorgänger $\boldsymbol{pre}(t) \in T_N$ zuordnet.

Ein *unendlicher Pfad* in T ist eine Teilmenge $P \subseteq T$, die jedes Level T_n in genau einem Knoten p_n schneidet, wobei gilt $\boldsymbol{pre}(p_{n+1}) = p_n$.

Zeigen Sie **Königs Lemma**: Jeder Baum T mit endlichen nichtleeren Leveln T_n, $n \in \mathbb{N}$, hat mindestens einen unendlichen Pfad.

Verfahren Sie dabei gemäß der folgenden Schritte:

1. Verwenden Sie T als Atommenge; dabei soll $\varphi(t) = 1$ bedeuten, dass $t \in P$ gilt.
2. Konstruieren Sie Formeln A_n, $n \in \mathbb{N}$, so dass A_n unter φ genau dann wahr wird, wenn φ genau ein $t \in T_n$ für P auswählt.
3. Konstruieren Sie Formeln B_{n+1}, $n \in \mathbb{N}$, sodass B_{n+1} unter φ genau dann wahr wird, wenn die eindeutigen gewählten Knoten aus T_n bzw. T_{n+1} in der Vorgängerrelation stehen. Weiter sei $B_0 = \top$.
4. Zeigen Sie, dass $\Gamma = \{\, A_n \,:\, n \in \mathbb{N} \,\} \cup \{\, B_n \,:\, n \in \mathbb{N}\}$ erfüllbar ist.

Lösungsvorschlag:

Da die Mengen T_n, $n \in \mathbb{N}$ endlich sind, gilt dies auch für die folgenden großen Konjunktionen bzw. Disjunktionen (Vorgriff auf die Notation von Folie 71).

- A_n soll ausdrücken, dass genau ein Element von T_n wahr ist, d.h., mindestens ein Element und höchstens ein Element:

  $$A_n := \left(\bigvee_{t \in T_n} t \right) \wedge \bigwedge_{u,v \in T_n,\, u \neq v} (u \to \neg v)$$

  Wegen $T_0 = \{r\}$ ist im Fall $n = 0$ die hintere Konjunktion leer und somit $\top$.

- B_{n+1} soll ausdrücken, dass für das gemäß A_{n+1} und A_n eindeutig bestimmte Paar $\langle t, u \rangle \in T_{n+1} \times T_n$ gilt $\boldsymbol{pre}(t) = u$:

  $$B_{n+1} = \bigwedge_{t \in T_{n+1}} t \to \boldsymbol{pre}(t)$$

  Die Implikation $t \to \boldsymbol{pre}(t)$ ist immer wahr, sofern t falsch ist. Damit sie auch für wahres t wahr wird, muß $\boldsymbol{pre}(t)$ das ausgewählte Element von T_n sein.

- Behauptung: Γ ist endlich erfüllbar.

  Ist $\Delta \subseteq \Gamma$ endlich, bestimme den maximalen Index m, der in den Formeln in Δ auftritt und setze

  $$\Delta' := \{\, A_n \,:\, n \leq m \,\} \cup \{\, B_n \,:\, n \leq m \,\}$$

  Diese Obermenge von Δ ist genau dann erfüllbar, wenn es einen Pfad der Länge m von der Wurzel gibt. Aber letzteres ist der Fall, da wir von jedem Element $t \in T_m$ nach m-facher Anwendung von $\boldsymbol{pre}$ bei der Wurzel r landen. Damit ist auch Δ erfüllbar.

- Nach dem Kompaktheitssatz ist Γ damit erfüllbar.

Hausaufgabe 3 [10+10 PUNKTE]

(a) [10 PUNKTE] Bestimmen Sie, ausgehend von der Definition auf Folie 47 und 48, alle Teilformeln von $A = \neg((\neg r \vee p) \wedge q)$ und färben Sie jeweils das ensprechende Teilwort und den entsprechenden Teil des Syntaxbaums von A ein.

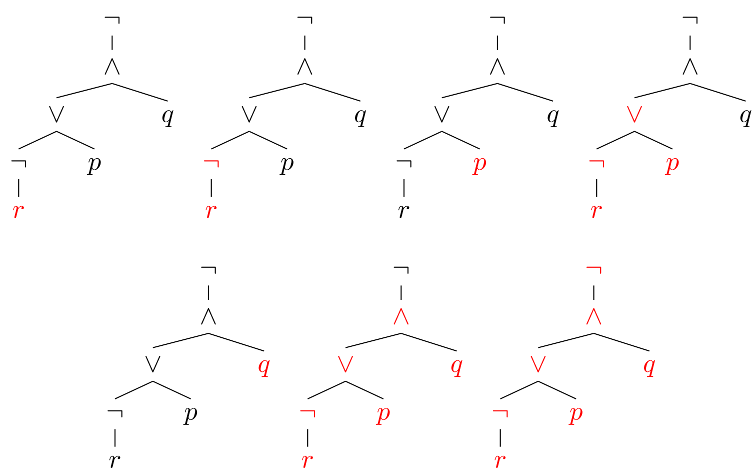
(b) [10 SONDERPUNKTE] (Sonderpunkte fließen *nicht* in die 50% ein.) Zeigen Sie: Die Teilformeln von A, also die Elemente von $T(A)$, sind genau die *zusammenhängenden* Teilwörter von A, die selber Formeln sind. [Ein Teilwort D von A ist zusammenhängend, sofern für je zwei verschiedene Buchstaben x und y des Worts D alle Buchstaben dazwischen auch zu D gehören.]

Lösungsvorschlag:

(a) Nach Definition (3 Punkte)

$$\begin{aligned} T(A) &= \{A\} \cup T\big(((\neg r \vee p) \wedge q)\big) \\ &= \{A, ((\neg r \vee p) \wedge q)\} \cup T\big((\neg r \vee p)\big) \cup T(q) \\ &= \{A, ((\neg r \vee p) \wedge q), (\neg r \vee p), q\} \cup T(\neg r) \cup T(p) \\ &= \{A, ((\neg r \vee p) \wedge q), (\neg r \vee p), q, \neg r, p\} \cup T(r) \\ &= \{A, ((\neg r \vee p) \wedge q), (\neg r \vee p), q, \neg r, p, r\} \end{aligned}$$

In der Baumdarstellung (3,5 Punkte)



Als markierte Teilwörter (3,5 Punkte):

$$\neg((\neg r \vee p) \wedge q) \ , \ \neg((\neg r \vee p) \wedge q) \ , \ \neg((\neg r \vee p) \wedge q) \ , \ \neg((\neg r \vee p) \wedge q)$$

$$\neg((\neg r \vee p) \wedge q) \ , \ \neg((\neg r \vee p) \wedge q) \ , \ \neg((\neg r \vee p) \wedge q)$$

(b) Beweis mit struktureller Induktion:

Vorüberlegung: ist der letzte Buchstabe einer Formel A eine schließende Klammer, so ist die zugehörige öffnende Klammer die erste öffnende Klammer von A.

- Klar für atomare Formeln und konstante Junktoren.
- Die Behauptung sei korrekt für alle Formeln mit weniger Junktoren als die molekulare Formel A.

  $A = \neg B$: Die Teilformel A ist selber zusammenhängendes Teilwort von A. Weiter ist jede Teilformel von B zusammenhängendes Teilwort von B und damit auch von A.

  Umgekehrt sei die Formel C zusammenhängendes Teilwort von A. Wir müssen zeigen, dass $C \in T(B) \cup \{A\}$ gilt.

  – Falls die führende Negation nicht zu C gehört, ist C zusammenhängendes Teilwort von B, nach Voraussetzung also eine Teilformel von B.

- Andernfalls gilt $C = \neg D$, und die Formel D ist als zusammenhängendes Teilwort von B nicht nur eine Teilformel von B , sondern sogar ein Präfix und hat somit genausoviele führende Negationen wie B . Nach diesen Negationen folgt entweder ein Atom, was dann der letzte Buchstabe von B wie von D ist, oder eine öffnende Klammer, deren zugehörige schließende Klammer dann der letzte Buchstabe von B wie von D ist. Daher gilt nun $D = B$ und folglich $C = A$.

$A = (B \star C)$: Die Teilformel A ist selber zusammenhängendes Teilwort von A . Weiter ist jede Teilformel von B bzw. von C zusammenhängendes Teilwort von B bzw. C und damit auch von A .

Umgekehrt sei die Formel D zusammenhängendes Teilwort von A . Wir müssen zeigen, dass $D \in T(B) \cup T(C) \cup \{A\}$ gilt.

- Falls der Junktor $\star$ zwischen B und C nicht zu D gehört, ist D zusammenhängendes Teilwort von B oder C , nach Voraussetzung also eine Teilformel von B oder C .
- Andernfalls hat D eine Teilformel der Form $(E \star F)$ mit ebendiesem Junktor $\star$. Nach Voraussetzung sind die Formeln E und F zusammenhängende Teilwörter von B bzw. C . Da in diesen Formeln die Anzahl der öffnenden mit der der schließenden Klammern übereinstimmt, kann die öffnende Klammer von $(E \star F)$ nicht zu B gehören, woraus $E = B$ folgt. Analog ergibt sich $F = C$, was nunmehr $D = A$ impiziert.

Hausaufgabe 4 [16 PUNKTE]

(a) [3 PUNKTE] Sei φ eine Bewertung mit $\varphi(p) = 1$ und $\varphi(q) = \varphi(r) = 0$. Berechnen Sie den Wert

$$\hat{\varphi}(\neg(p \to q) \vee r)$$

schrittweise gemäß der Definition.

(b) [5 PUNKTE] Beweisen oder widerlegen Sie, dass $q \to (r \to (p \vee q))$ eine Tautologie ist.

(c) [3 PUNKTE] Beweisen oder widerlegen Sie, dass $\{q \to p\} \models p \to q$ gilt.

(d) [5 PUNKTE] Beweisen oder widerlegen Sie, dass $\neg p \vee \neg q \;\models\!\!\!\!\models\; \neg(p \wedge q)$, wobei $A \;\models\!\!\!\!\models\; B$ abkürzend für $\{A\} \models B$ und $\{B\} \models A$ steht.

Lösungsvorschlag:

Man instanziiert die Junktoren in $\mathcal{J}$ zu Operationen auf $\mathbb{B}$, wie in Folie 41 angegeben und erhält eine $\mathcal{J}$ -Algebra. Oder man verwendet die Wahrheitstabellen auf Folie 42.

(a)

$$\underbrace{\underbrace{\neg(\underbrace{\underbrace{p}_{1} \to \underbrace{q}_{0}}_{0})}_{1} \vee \underbrace{r}_{0}}_{1}$$

Alternativ kann man auch „algebraisch“ umformen:

$$\begin{aligned}
\varphi(\neg(p \to q) \vee r) &= \sup\{\varphi(\neg(p \to q)), \varphi(r)\} \\
&= \sup\{1 - \varphi(p \to q), 0\} \\
&= \sup\{1 - \leq \langle \varphi(p), \varphi(q) \rangle, 0\} \\
&= \sup\{1 - \leq \langle 1, 0 \rangle, 0\} \\
&= \sup\{1 - 0, 0\} \\
&= \sup\{1, 0\} \\
&= 1
\end{aligned}$$

(b) Wir geben $\boldsymbol{e}_A$ tabellarisch an (Wahrheitstabelle):

p	q	r	q	$\to$	$(r$	$\to$	$(p$	$\vee$	$q))$
0	0	0	0	**1**	0	1	0	0	0
0	0	1	0	**1**	1	0	0	0	0
0	1	0	1	**1**	0	1	0	1	1
0	1	1	1	**1**	1	1	0	1	1
1	0	0	0	**1**	0	1	1	1	0
1	0	1	0	**1**	1	1	1	1	0
1	1	0	1	**1**	0	1	1	1	1
1	1	1	1	**1**	1	1	1	1	1

Da die Hauptspalte (fett gedruckt) nur Einsen enthält, ist $q \to (r \to (p \vee q))$ eine Tautologie.

(c) Die Bedingung $\hat{\varphi}(p \to q) = 1$ bzw. $\hat{\varphi}(q \to p) = 1$ sind äquivalent zu $\varphi(p) \leq \varphi(q)$, bzw. $\varphi(q) \leq \varphi(p)$. Aber keine der letzten beiden Bedingungen impliziert die andere: Wähle etwa φ mit $\varphi(p) = 0$ und $\varphi(q) = 1$. Dann gilt $\hat{\varphi}(p \to q) = 1$ aber $\hat{\varphi}(q \to p) = 0$. Daher ist die Behauptung falsch.

(d) Da der logische Folgerungsbegriff semantisch definiert ist, lohnt auch hier ein Blick auf die Tabellen der Boole'schen Funktionen:

p	q	$\neg$	p	$\vee$	$\neg$	q
0	0	1	0	**1**	1	0
0	1	1	0	**1**	0	1
1	0	0	1	**1**	1	0
1	1	0	1	**0**	0	1

p	q	$\neg$	$(p$	$\wedge$	$q)$
0	0	**1**	0	1	0
0	1	**1**	0	1	1
1	0	**1**	1	1	0
1	1	**0**	1	0	1

Die Wahrheitswerte der Formeln $\neg p \vee \neg q$ und $\neg(p \wedge q)$ stimmen für alle möglichen Belegungen überein.

(Die Behauptung ist übrigens äquivalent dazu, dass es sich bei $(\neg p \vee \neg q) \leftrightarrow (\neg(p \wedge q)$ um eine Tautologie handelt.)

Hausaufgabe 5 [10 PUNKTE]

Beweisen Sie das 2. Korollar zum Kompaktheitssatz auf Folie 53: Für eine Formelmenge Γ sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) Jede Belegung erfüllt mindestens eine Formel $B \in \Gamma$.

(b) Es gibt $n \in \mathbb{N}$ und $\boldsymbol{B} \in \Gamma^n$ mit $B_0 \vee \cdots \vee B_{n-1}$ allgemeingültig.

Lösungsvorschlag:

Man beachte, dass $n > 0$ gelten muß, denn die leere Disjunktion $\perp$ ist nicht allgemeingültig.

Der Übergang zur Menge $\neg\Gamma = \{\, \neg A \;:\; A \in \Gamma \,\}$ erlaubt uns, jede der obigen Bedingungen wie folgt äquivalent umzuformulieren:

(a)' Jede Belegung erfüllt mindestens eine Formel $\neg B \in \neg\Gamma$ nicht.

(b)' Es gibt $n \in \mathbb{N}$ und $\boldsymbol{B} \in \Gamma^n$ mit $\neg B_0 \wedge \ldots \wedge \neg B_{n-1} = \neg(B_0 \vee \cdots \vee B_{n-1})$ unerfüllbar.

Eine weitere äquivalente Umformulierung liefert nun:

(a)” $\neg\Gamma$ ist unerfüllbar.

(b)” $\neg\Gamma$ hat eine endliche unerfüllbare Teilmenge (etwa $\{\neg B_i : i < n\}$, die Reihenfolge ist irrelevant).

Offenbar sind die Aussagen (a)” und $(b)''$ genau dann äquivalent, wenn ihre Negationen äquivalent sind. Aber das sind gerade die äqivalenten Bedingugen des Kompaktheitssatzes:

(a)”’ $\neg\Gamma$ ist erfüllbar.

(b)”’ $\neg\Gamma$ ist endlich erfüllbar.

Wegen der Äquivalenz von (a)”’ und (b)”’ sind auch (a)” und (b)” äquivalent, ebenso (a)’ und (b)’ und schließlich auch (a) und (b).

Hausaufgabe 6 [13 PUNKTE]

Fakt: Auf einem Globus mit zusammenhängenden Ländern können diese aufgrund des berühmten *Vierfarbensatz* so gefärbt werden, dass benachbarte Länder verschiedene Farben tragen.

Zur Terminologie: Ein Land heißt *zusammenhängend*, wenn man je zwei seiner Punkte durch einen Weg (auf der Erd-Oberfläche) verbinden kann, der innderhalb des Landes verläuft. Inseln (Sylt) oder Exklaven (Kaliningrad) sind verboten[1] Zwei Länder heißen *benachbart*, wenn sie ein gemeinsames Stück Grenze haben, das keine *Ecke* ist, d.h., nicht zu drei oder mehr Ländern gehört (etwa Four Corners in den USA, wo Arizona, Colorado, New Mexico und Utah zusammentreffen; Arizona und Colorado sind nicht benachbart, ebensowenig Utah und New Mexico).

Alternativ kann man den *ungerichteten planaren Graphen* betrachten, dessen Knoten die Hauptstädte, und dessen Kanten Autobahen zwischen denselben sind, die die Grenze genau einmal überqueren und sich höchstens in den Hauptstädten schneiden (*das garantiert die Planarität*).

(a) [1 PUNKT] Was bedeutet die 4-Färbbarkeit einer Landkarte für den zugehörigen planaren Graphen?

(b) [2 PUNKTE] Genügen vier Farben auch, wenn man in der graphentheoretischen Version auf die Forderung nach Planarität verzichtet, d.h., wenn sich die Kanten bei der Einbettung in die Kugeloberfläche auch schneiden dürfen? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) [6 PUNKTE] Konstruieren Sie für einen gegebenen Graphen $G = \langle V, E\rangle$ mit Hilfe atomarer Formeln der Form $C_{u,j}$, die die möglichen Färbungen $j < 4$ eines jeden Knoten $u \in V$ ausdrücken, eine Formelmenge Γ, die genau dann erfüllbar ist, wenn G 4-färbbar ist.

(d) [4 PUNKTE] Zeigen Sie mit Hilfe des Kompakteitssatzes, dass auch jeder unendliche planare Graph mit vier Farben gefärbt werden kann.

Lösungsvorschlag:

Wir sprechen hier von *ungerichteten* Graphen.

(a) Eine korrekte 4-Färbung weist den Knoten des Graphen Farben aus einer 4-elementigen Menge, etwa $4 = \{0, 1, 2, 3\}$, zu, so dass die Endpunkte jeder Kante verschiedenen Farben haben. Etwas mathematischer: Eine 4-Färbung ist ein Graphenmorphismus (= Knoten- und Kanten-erhaltende Abbildung) von $G = \langle V, E\rangle$ in den vollständigen Graphen K_4 mit Knotenmenge $\{0, 1, 2, 3\}$, in dem je zwei verschiedene(!) Knoten durch eine Kante verbunden sind.

[1] Ein Land mit m Zusammenhangskomponenten heißt auch m-*Pire*; hier interessieren uns nur 1-Pires.

(b) Nein, betrachte den vollständigen Graphen K_5 mit Knotenmenge $5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, in dem je zwei verschiedene Knoten durch eine Kante verbunden sind. Während K_4 noch planar ist, hat K_5 diese Eigenschaft nicht mehr (man versuche, den Knoten 4 in dieselbe Ebene zu zeichnen wie K_4, und dann mit allen Knoten von K_4 so zu verbinden, dass keine der vorhandenen Kanten geschnitten wird).

(c) Als Atome verwenden wir die Symbole $C_{u,x}$ mit $\langle u, x\rangle \in V \times \{0, 1, 2, 3\}$.

- Jeder Knoten soll mindestens eine Farbe haben: $F_u := C_{u,0} \vee C_{u,1} \vee C_{u,2} \vee C_{u,3}$ für $u \in V$.
- Jeder Knoten soll höchstens eine Farbe haben: $E_u = \bigwedge_{j<k<4}(C_{u,j} \to \neg C_{u,k})$ für $u \in V$;
- Endpunkte von Kanten sind unterschiedlich gefärbt: $K_{u,v} = \bigwedge_{j<4} \neg(C_{u,j} \wedge C_{v,j})$ sofern $\{u, v\} \in E$.

Δ_G bestehe aus all diesen Formeln. Eine erfüllende Belegung bestimmt eindeutig eine valide 4-Färbung.

Nach Konstruktion hat im endlichen Fall die Landkarte, bzw. der zugehörige planare Graph genau dann eine 4-Färbung, wenn Δ_G erfüllbar ist. Der 4-Farbensatz garantiert nun, dass Δ_G im planaren Fall immer erfüllbar ist.

(d) Ist der Graph G, bzw. die disjunkte Vereinigung $V + E$, unendlich, so gilt dies auch für die Menge Δ_G.

Um für eine endliche Teilmengen $\Phi \subseteq \Delta_G$ die Erfüllbarkeit zu zeigen, betrachte die endliche Menge $U \subseteq V$ aller Knoten (Länder), die in den Formeln von Φ als Index vorkommen. Der von diesen Knoten aufgespannte Teilgraph H von G entsteht durch Löschen aller Knoten aus $V - U$ im Graphen G, samt der mit diesen Knoten inzidenten Kanten.

Wir ergänzen nun Φ um alle fehlenden Formeln F_u, E_u und $K_{u,v}$, in denen Knoten aus H als Index vorkommen; die resultierende Menge $\Delta_H \supseteq \Phi$ ist immer noch endlich, und nach dem 4-Farbensatz erfüllbar. Damit ist auch die Teilmenge Φ erfüllbar.

Aufgrund des Kompaktheitssatz ist dann auch auch Δ_G erfüllbar.