Einführung in die Logik

Aufgabenblatt 6, 2023-07-10

Präsenzaufgabe 1

(a) Unter welchen Bedingungen ist die Herbrand-Expansion einer geschlossenen Formel A in Skolem-Normalform endlich?

(b) Unter welchen Bedingungen ist die Herbrand-Expansion einer geschlossenen Formel A in Skolem-Normalform isomorph zu den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$?

(c) Geben Sie für $\mathcal{S} = \{c_{/0}, f_{/1}, g_{/2}\} + \{P_{/1}, Q_{/2}\}$ die Elemente der Herbrand-Expansion für $A = \forall x.\big(P(x) \wedge \neg P(f(x))\big)$ an, die *ohne Klammern* höchstens 11 Symbole enthalten.

Lösungsvorschlag:

(a) Es gibt zwei Möglichkeiten für $E(A)$, endlich zu sein: falls der quantorenfreie Teil B von A keine Variablen enthält, oder wenn $D_{\mathcal{H}}$ endlich ist. Letzteres ist genau dann der Fall, wenn $\boldsymbol{Fun}$ nur aus endlich vielen Konstanten besteht. Sobald neben $c_{/0} \in \boldsymbol{Fun}$ auch ein $f_{/n} \in \boldsymbol{Fun}$ mit $n > 0$ existiert, können wir z.B. den Term $f(x, c, \ldots, c)$ in beliebiger Tiefe in sich selbst substituieren und schließlich mit c für x terminieren und auf diese Weise unendlich viele verschiedene Elemente von $D_{\mathcal{H}}$ erzeugen.

(b) Da die Signatur $\mathcal{S}$ und die Variablenmenge $\mathcal{V}$ abzählbar sind, gilt dies auch für $\boldsymbol{FO}(\mathcal{S})$ und deren Teilmenge $E(A)$, vergl. Anhang B. Immer wenn $E(A)$ unendlich ist, ist diese Menge abzählbar unendlich, und damit isomorph zu $\mathbb{N}$! (trick question!)

(c) 7 Symbole: $P(c) \wedge \neg P(f(c))$
9 Symbole: $P(f(c)) \wedge \neg P(f(f(c)))$
11 Symbole: $P(f(f(c))) \wedge \neg P(f(f(f(c))))$, $P(g(c,c)) \wedge \neg P(f(g(c,c)))$

Präsenzaufgabe 2

Zeigen Sie unter Verwendung der prädikatenlogischen Tableau-Methode, dass folgende Formel nicht erfüllbar ist:

$$\neg\Bigg[\bigg(\forall x.\,\Big(P(x) \to \neg P\big(f(x)\big)\Big) \wedge \exists y.\,\Big(\neg P\big(f(y)\big) \to P(y)\Big)\bigg) \to \exists z.\,\Big(P(z) \wedge \neg P\big(f(z)\big)\Big)\Bigg]$$

Lösungsvorschlag:

Eliminierung der ersten Implikation und De Morgan liefert

$$\forall x.\,\Big(P(x) \to \neg P\big(f(x)\big)\Big) \wedge \exists y.\,\Big(\neg P\big(f(y)\big) \to P(y)\Big) \wedge \forall z.\,\Big(\neg P(z) \vee P\big(f(z)\big)\Big)$$

$$\star\ \forall x.\,\big(P(x) \to \neg P(f(x))\big) \wedge \exists y.\,\big(\neg P(f(y)) \to P(y)\big) \wedge \forall z.\,\big(\neg P(z) \vee P(f(z))\big) \quad 0$$

$$0a\ \forall x.\,\big(P(x) \to \neg P(f(x))\big) \quad {\color{blue}3}$$

$$0b\ \exists y.\,\big(\neg P(f(y)) \to P(y)\big) \quad 1$$

$$0c\ \forall z.\,\big(\neg P(z) \vee P(f(z))\big) \quad {\color{green}5}$$

$$1\delta\ \neg P(f(a)) \to P(a) \quad 2$$

$${\color{blue}3\gamma}\ P(f(a)) \to \neg P(f(f(a))) \quad 4$$

$${\color{green}5\gamma}\ \neg P(f(a)) \vee P(f(f(a))) \quad 6$$

$${\color{blue}3\gamma}\ P(a) \to \neg P(f(a)) \quad 7$$

$${\color{green}5\gamma}\ \neg P(a) \vee P(f(a)) \quad 8$$

$$2a\ P(f(a)) \qquad\qquad 2b\ P(a)$$

$$4a\ \neg P(f(a))\ {\color{red}\lightning 2a} \qquad 4b\ \neg P(f(f(a))) \qquad 7a\ \neg P(a)\ {\color{red}\lightning 3b} \qquad 7b\ \neg P(f(a))$$

$$6a\ \neg P(f(a))\ {\color{red}\lightning 2a} \quad 6b\ P(f(f(a)))\ {\color{red}\lightning 4b} \qquad 8a\ \neg P(a)\ {\color{red}\lightning 3b} \quad 8b\ P(f(a))\ {\color{red}\lightning 7b}$$

In der Praxis erscheint es sinnvoll, die Bedingung abzuschwächen, dass γ-Teilchen in derselben Knotenmenge verbleiben sollen. Man weiß á priori nicht, wie oft einzelne γ-Formeln zu verwenden sind, also wieviel Platz man für die einzelnen Knotemengen lassen muß. Außerdem kann man die resultierenden γ-Teilchen näher zu der Position bringen, in der ein Widerspruch angestrebt wird:

$$\star\ \forall x.\,\big(P(x) \to \neg P(f(x))\big) \wedge \exists y.\,\big(\neg P(f(y)) \to P(y)\big) \wedge \forall z.\,\big(\neg P(z) \vee P(f(z))\big) \quad 0$$

$$0a\ \forall x.\,\big(P(x) \to \neg P(f(x))\big) \quad {\color{blue}3}$$

$$0b\ \exists y.\,\big(\neg P(f(y)) \to P(y)\big) \quad 1$$

$$0c\ \forall z.\,\big(\neg P(z) \vee P(f(z))\big) \quad {\color{green}5}$$

$$1\delta\ \neg P(f(a)) \to P(a) \quad 2$$

$$2a\ P(f(a)) \qquad\qquad 2b\ P(a)$$

$${\color{blue}3\gamma}\ P(f(a)) \to \neg P(f(f(a))) \quad 4 \qquad\qquad {\color{blue}3\gamma}\ P(a) \to \neg P(f(a)) \quad 7$$

$$4a\ \neg P(f(a))\ {\color{red}\lightning 2a} \qquad 4b\ \neg P(f(f(a))) \qquad 7a\ \neg P(a)\ {\color{red}\lightning 3b} \qquad 7b\ \neg P(f(a))$$

$${\color{green}5\gamma}\ \neg P(f(a)) \vee P(f(f(a))) \quad 6 \qquad\qquad {\color{green}5\gamma}\ \neg P(a) \vee P(f(a)) \quad 8$$

$$6a\ \neg P(f(a))\ {\color{red}\lightning 2a} \quad 6b\ P(f(f(a)))\ {\color{red}\lightning 4b} \qquad 8a\ \neg P(a)\ {\color{red}\lightning 3b} \quad 8b\ P(f(a))\ {\color{red}\lightning 7b}$$

Hausaufgabe 3 [10 PUNKTE]

Herbrand Theorie:

1. [4 PUNKTE] Die Signatur für

$$F = \forall y\, \exists x.\, P(g(y,z),x) \lor \exists x.\, Q(f(x), g(y,z), y)$$

   enthalte die Funktionssymbole $f_{/1}$ und $g_{/2}$. Berechnen Sie eine Skolemnormalform für F.

2. [4 PUNKTE] Bestimmen Sie die Herbrand-Expansion für

$$G = \exists y\, \forall x\, \forall z.\, \big(P(x,i) \land Q(y,z,h)\big)$$

   sofern ***Fun*** nur die Konstanten $h_{/0}$ und $i_{/0}$ enthält.

3. [2 PUNKTE] Hat

$$H = \exists x \forall y.\, \neg\exists z.\, \big(\forall y.\, P(y,z) \to Q(v,y,z)\big)$$

   über derselben Signatur eine endliche Herbrand-Expansion? Begründen Sie Ihre Antwort. [Anmerkung: bei H liegt kein Tippfehler vor!]

Hinweis: Bedenken Sie, dass die Herbrand-Expansion erfordert, dass die Formel zunächst in Skolemnormalform gebracht wird.

Lösungsvorschlag:

1. Zwecks Bereinigung substituieren wir u für y im ersten Teil und w für x im zweiten Teil, bevor wir den vorderen Teil unter den Quantor $\exists w$ ziehen, und dann die atomare Formel mit Q unter die Quantoren $\forall u\, \exists x$ ziehen:

$$\begin{aligned} F &\models\!\!\!\!\models \forall u\, \exists x.\, P(g(u,z),x) \lor \exists w.\, Q(f(w), g(y,z), y) \\ &\models\!\!\!\!\models \exists w\, .\big(\forall u\, \exists x.\, P(g(u,z),x) \lor Q(f(w), g(y,z), y)\big) \\ &\models\!\!\!\!\models \exists w\, \forall u\, \exists x.\, \big(P(g(u,z),x) \lor Q(f(w), g(y,z), y)\big) \end{aligned}$$

   Zwecks Skolemisierung führen wir eine Konstante $c_{/0}$ für w und einen 1-stelligen Operator $h_{/1}$ für x ein und erhalten:

$$S(F) = \forall y.\, \big(P(g(y,z), h(y)) \lor Q(f(c), g(y,z), y)\big)$$

   Achtung: Skolemisierung ist *nicht* eindeutig!

   Bessere(?) Alternative: Zwecks Bereinigung substituieren wir u für y im All-Quantor, bevor wir die zweite Formel unter denselben ziehen, um dann die rechte Rechenregel (2) von Folie 224 anzuwenden:

$$\begin{aligned} F &\models\!\!\!\!\models \forall u\, \exists x.\, P(g(u,z),x) \lor \exists x.\, Q(f(x), g(y,z), y) \\ &\models\!\!\!\!\models \forall u\, .\big(\exists x.\, P(g(u,z),x) \lor \exists x.\, Q(f(x), g(y,z), y)\big) \\ &\models\!\!\!\!\models \forall u\, \exists x.\, \big(P(g(u,z),x) \lor Q(f(x), g(y,z), y)\big) \end{aligned}$$

   Zwecks Skolemisierung führen wir einen 1-stelligen Operator $h_{/1}$ für x ein und erhalten:

$$S'(F) = \forall u.\, \big(P(g(u,z), h(u)) \lor Q(f(h(u)), g(y,z), y)\big)$$

2. Skolemisierung mit einer Konstanten $c_{/0}$ für y liefert

$$G' = \forall x\, \forall z.\, \Big(P(x, i) \wedge Q(c, z, h)\Big)$$

In dieser erweiterten Signatur ergibt sich die Menge der variablen-freien Terme zu

$$D_{\mathcal{H}} = \{c, h, i\}$$

Damit besteht die Herbrand-Expansion von G aus den 9 Konjunktionen atomarer Formeln, bei denen x und z die Menge $D_{\mathcal{H}}$ durchlaufen.

3. Ja, denn dieselbe endliche Menge $D_{\mathcal{H}}$ kommt zum Tragen.

Hausaufgabe 4 [10 PUNKTE]

Zeigen Sie mit Hilfe eines Tableaus die Allgemeingültigkeit von

$$\Big(\forall x\, \forall y.\, \big(\neg\neg P(x, y) \to P(y, x)\big) \wedge \forall x\, \exists y.\, P(x, y)\Big) \to \forall x\, \exists y.\, P(y, x)$$

Lösungsvorschlag:

Beachte, dass doppelte Negationen sofort entfernt werden dürfen. Damit besagt die Behauptung, dass für eine symmetrische totale Relation auch die duale Relation total ist, was zumindest plausibel klingt.

Formal ist die Behauptung äquivalent zur Unerfüllbarkeit der Menge

$$\Gamma = \{\forall x\, \forall y.\, \big(P(x, y) \to P(y, x)\big) \wedge \forall x\, \exists y.\, P(x, y), \neg\forall x\, \exists y.\, P(y, x)\}$$

$$\begin{array}{c}
\star\ \forall x\, \forall y.\, \big(P(x, y) \to P(y, x)\big) \wedge \forall x\, \exists y.\, P(x, y) \quad 2 \\
| \\
\star\ \neg\forall x\, \exists y.\, P(y, x) \quad 0 \\
| \\
0\delta\ \ \neg\exists y.\ P(y, a) \quad 1 \\
| \\
1\gamma\ \ \neg P(a, a) \\
| \\
2a\ \ \forall x\, \forall y.\, \big(P(x, y) \to P(y, x)\big) \quad 5 \\
| \\
2b\ \ \forall x\, \exists y.\, P(x, y) \quad 3 \\
| \\
3\gamma\ \ \exists y.\, P(a, y) \quad 4 \\
| \\
4\delta\ \ P(a, b) \\
| \\
5\gamma\ \ P(a, b) \to P(b, a) \quad 6 \\
\begin{array}{cc}
6a\ \ \neg P(a, b) \qquad & \qquad 6b\ \ P(b, a) \\
 & | \\
 & 1\gamma\ \ \neg P(b, a)
\end{array}
\end{array}$$

Die erste Instanz von 1γ, $\neg P(a, a)$ stellt sich nachträglich als überflüssig heraus und kann entfernt werden.

Hausaufgabe 5 [10 PUNKTE]

Zeigen Sie unter Verwendung der (prädikatenlogischen) Resolventenmethode, dass die folgende Formel unerfüllbar ist. Bringen Sie die Formel dafür zunächst in eine geeignete Form.

$$\exists z\, \forall x\, \forall y.\, \Big(\big(P(y) \to Q(x,x)\big) \wedge \big(Q(x,y) \to R(y)\big) \wedge P(z) \wedge \big(\neg R(z) \vee \neg P(z)\big) \Big)$$

Lösungsvorschlag:

Umwandlung des quantorenfreien Teils in KNF liefert

$$\exists z\, \forall x\, \forall y.\, \Big(\big(\neg P(y) \vee Q(x,x)\big) \wedge \big(\neg Q(x,y) \vee R(y)\big) \wedge P(z) \wedge \big(\neg R(z) \vee \neg P(z)\big) \Big)$$

Die resultierenden Klausen behandeln wir nun mit Resolution: