TCS
Dr. Jürgen Koslowski

Einführung in die Logik, Übungsklausur

2023-07-17

Aufgabe 1 [12 PUNKTE]

1. [6 PUNKTE] Wandeln Sie die Formel

$$A = \neg\Big(\neg s \to \big((p \vee q) \wedge r\big)\Big)$$

in eine möglichst kleine erfüllungsäquivalente KNF in Mengenschreibweise um, indem Sie geschickt(!) eine Tseitin-Transformation einsetzen.

2. [6 PUNKTE] Zeigen Sie mit Hilfe der graphischen Resolutionsmethode (mit Streichung von Klauseln), bei der pro Schritt alle Resolventen mit einer bestimmten Variablen gebildet werden, die Unerfüllbarkeit von

$$\Gamma = \{p \vee q \vee r, \neg q, \neg p \vee q \vee r \vee s, q \vee r \vee \neg s, q \vee \neg r\}$$

Verwenden Sie zwecks leichterer Korrektur die Reihenfolge q, r, p, s.

Lösungsvorschlag:

1. Elimination der Implikation und der führende Negationen liefert

$$A \mathrel{\models\!\!\!\dashv} \neg s \wedge \neg\big((p \vee q) \wedge r\big)$$

Der Hauptjunktor ist $\wedge$ und bei $\neg s$ handelt es sich bereits um eine Klausel. Insofern ist nur $\neg\big((p \vee q) \wedge r\big)$ zu behandeln. Wieder ist die führende Negation zu entfernen:

$$B := \neg(p \vee q) \vee \neg r$$

hat eine echte binäre Teilformel:

$$t_0 \leftrightarrow p \vee q$$

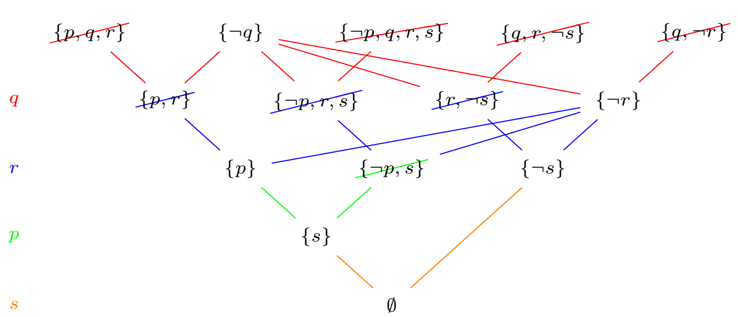
Das liefert

$$\boldsymbol{Tst}(B) := \{\neg t_0, \neg r\}\{p, q, \neg t_0\}, \{\neg p, t_0\}, \{\neg q, t_0\} \in \mathsf{KNF}$$

Insgesamt ist A also erfüllungsäquivalent zu

$$\{\neg s\}\{\neg t_0, \neg r\}\{p, q, \neg t_0\}, \{\neg p, t_0\}, \{\neg q, t_0\}$$

2.



Aufgabe 2 [12 PUNKTE]

Anwendung des Davis-Putnam-Verfahrens: Wenden Sie nach Möglichkeit die Unit- oder die Pure-Literal-Regel an, bevor sie zur Splitting-Regel greifen:

(a) [6 PUNKTE] $\{p \wedge q, q \rightarrow r\} \models r$

(b) [6 PUNKTE] Die Klauselmenge $\{\{p, q, \neg t, s\}, \{\neg p, \neg q, \neg r, s\}, \{\neg p, \neg q, \neg r\}\}$ ist erfüllbar; wieviele Möglichkeiten gibt es, mit Davis-Putnam zum Ziel zu kommen?

Lösungsvorschlag:

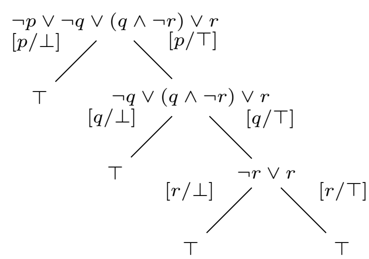
(a) Die Endlichkeit von Γ und das Deduktionstheorem liefern

$$\models (p \wedge q) \wedge (\neg q \vee r) \rightarrow r$$

Die zugehörige NNF ergibt sich zu

$$\models \neg p \vee \neg q \vee (q \wedge \neg r) \vee r$$

Zum Nachweis der Tautologie-Eigenschaft ist der gesamte binäre Baum zu untersuchen, ob jedes Blatt den Wert $\top$ annimmt. (Die Unit- und Pure-Literal Regeln dienen zum Ausschluß von garantiert nicht erfüllbaren Zweigen bei der Untersuchung der Erfüllbarkeit, nützen also nichts bei der Überprüfung der Tautologie-Eigenschaft!)



Da alle Zweige dess vollständigen binären Baums(!) in $\top$ enden, handelt es sich um eine Tautologie.

VIEL geschickter ist es allerdings, die Nicht-Erfüllbarkeit von $\{p \wedge q, \neg q \vee r, \neg r\}$ bzw. der Konjunktion $p \wedge q \wedge (\neg q \vee r) \wedge \neg r$ dieser Formeln nachzuweisen. Parallele Anwendung der Unit-Regeln für p, q und r liefert sofort $\bot$.

(b) Hier ist die Pure-Literal Regel sowohl für r wie auch für s und für t anwendbar. Sobald nur noch eine Klausel übrigbleibt, ist die Pure-Literal Regel für jedes vorkommende Atom anwendbar:

$$\begin{array}{l}
\{p, q, \neg t, s\}, \{\neg p, \neg q, \neg r, s\}, \{\neg p, \neg q, \neg r\} \\
\quad \Big| \; [r/\bot] \\
\{p, q, \neg t, s\} \\
\quad \Big| \; [s/\top] \; \Big| \; [p/\top] \; \Big| \; [q/\top] \; \Big| \; [t/\bot] \\
\top
\end{array}$$

oder

$$\begin{array}{l}
\{p, q, \neg t, s\}, \{\neg p, \neg q, \neg r, s\}, \{\neg p, \neg q, \neg r\} \\
\quad \Big| \; [s/\top] \\
\{\neg p, \neg q, \neg r\} \\
\quad \Big| \; [p/\bot] \; \Big| \; [q/\bot] \; \Big| \; [r/\bot] \\
\top
\end{array}$$

oder

$$\begin{array}{c} \{p, q, \neg t, s\}, \{\neg p, \neg q, \neg r, s\}, \{\neg p, \neg q, \neg r\} \\ \Big|\ [t/\bot] \\ \{\neg p, \neg q, \neg r, s\}, \{\neg p, \neg q, \neg r\} \\ \Big|\ [p/\bot] \Big| [q/\bot] \Big| [r/\bot] \\ \top \end{array} \qquad \text{oder} \qquad \begin{array}{c} \{p, q, \neg t, s\}, \{\neg p, \neg q, \neg r, s\}, \{\neg p, \neg q, \neg r\} \\ \Big|\ [t/\bot] \\ \{\neg p, \neg q, \neg r, s\}, \{\neg p, \neg q, \neg r\} \\ \Big|\ [s/\top] \\ \{\neg p, \neg q, \neg r\} \\ \Big|\ [p/\bot] \Big| [q/\bot] \Big| [r/\bot] \\ \top \end{array}$$

Dabei steht $\Big|$ für „oder“. Das liefert 13 Möglichkeiten. Erlaubt man die parallele Anwendung der Pure-Literal Regeln (vergl. Blatt 4, Aufgabe 7) ergeben sich weitere Möglichkeiten:

$$\begin{array}{c} \{p, q, \neg t, s\}, \{\neg p, \neg q, \neg r, s\}, \{\neg p, \neg q, \neg r\} \\ \Big|\ [\langle r, s\rangle/\langle\bot, \top\rangle] \Big| [\langle r, s, t\rangle/\langle\bot, \top, \bot\rangle] \Big| [\langle r, t\rangle/\langle\bot, \bot\rangle] \\ \top \end{array}$$

sowie

$$\begin{array}{c} \{p, q, \neg t, s\}, \{\neg p, \neg q, \neg r, s\}, \{\neg p, \neg q, \neg r\} \\ \Big|\ [\langle s, t\rangle/\langle\top, \bot\rangle] \\ \{\neg p, \neg q, \neg r\} \\ \Big|\ [p/\bot] \Big| [q/\bot] \Big| [r/\bot] \\ \top \end{array}$$

Das war keine gute Aufgabe :-((Die beste Lösung dürfte die maximale parallele Substitution $[\langle r, s, t\rangle/\langle\bot, \top, \bot\rangle]$ sein. Dass man mit gewissen partiellen parallelen Substitutionen genauso schnell zum Ziel kommt, ist Zufall.

Aufgabe 3 [12 PUNKTE]

Wir betrachten die Signatur $\mathcal{S}_{\text{arith}} = \{0_{/0}, 1_{/0}, +_{/2}, *_{/2}; <_{/2}\}$ der Arithmetik und die Struktur $\mathcal{Q} = \langle \mathbb{Q}, I\rangle$ mit den rationalen Zahlen als Wertebereich und der üblichen Interpretation der Operatoren und Prädikate.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ setze $B_n := 0 < x \wedge (\underbrace{1 + \cdots + 1}_{n \text{ mal}}) * x < 1$ mit freiem x und definiere

$$\Gamma := \{\, A \in \boldsymbol{FO}(\mathcal{S}) \,:\, A \text{ geschlossen, und} \models_{\mathcal{Q}} A \,\} \cup \{\, B_n \,:\, n \in \mathbb{N} \,\}$$

(a) [6 PUNKTE] Zeigen Sie, dass Γ erfüllbar ist.

(b) [6 PUNKTE] Zeigen Sie, dass es keine Belegung $\sigma \in \mathbb{Q}^{\mathcal{V}}$ gibt mit $\hat{\sigma}(G) = \mathcal{M}[\![G]\!](\sigma) = 1$ für alle $G \in \Gamma$, d.h., jedes Modell für Γ ist ein Nichtstandardmodell für die abgeschlossenen Formeln in Γ.

Lösungsvorschlag:

(a) [6 PUNKTE] Ist $\Delta \subseteq \Gamma$ endlich, so existiert ein maximales $m \in \mathbb{N}$ mit $B_m \in \Delta$. Nun wähle eine Belegung der Variablen $\sigma \in \mathbb{Q}^{\mathcal{V}}$ mit $\sigma(x) := (m+1)^{-1}$. Nun bildet $\hat{\sigma}$ alle geschlossenen Formeln aus Δ trivialerweise auf 1 ab, und nach Konstruktion auch alle Formeln der Form B_n, die in Δ liegen, da diese $n \leq m$ und folglich $(m+1)^{-1} < (n+1)^{-1}$ erfüllen.

Da Γ endlich erfüllbar ist, ist Γ aufgrund des Kompaktheitszatzes der Prädikatenlogik auch erfüllbar.

(b) [6 PUNKTE] Wir nehmen an, eine Belegung $\sigma \in \mathbb{Q}^{\mathcal{V}}$ erfüllt alle Formeln in Γ. Dann muß $\sigma(x)$ einerseits positiv sein, andererseits aber auch kleiner als jede Zahl n^{-1}, $n \in \mathbb{N}$, und damit kleiner als jede positive rationale Zahl. Das ist unmöglich, Widerspruch.

Aufgabe 4 [12 PUNKTE]

Zeigen Sie mit Hilfe eines Tableaus die Unerfüllbarkeit von

$$\neg\Big(\forall x \left[P(x) \to P(f(x))\right] \to \forall x \left[P(x) \to P(f(f(x)))\right]\Big)$$

Lösungsvorschlag:

$$\star \;\; \neg\Big(\forall x \left[P(x) \to P(f(x))\right] \to \forall x \left[P(x) \to P(f(f(x)))\right]\Big) \quad 0$$

$$0a \;\; \forall x \left[P(x) \to P(f(x))\right] \quad 3$$

$$0b \;\; \neg\forall x \left[P(x) \to P(f(f(x)))\right] \quad 1$$

$$1\delta \;\; \neg[P(a) \to P(f(f(a)))] \quad 2$$

$$2a \;\; P(a)$$

$$2b \;\; \neg P(f(f(a)))$$

$$3\gamma \;\; P(a) \to P(f(a)) \quad 4$$

$$4a \;\; \neg P(a) \;\; ↯ 2a \qquad\qquad 4b \;\; P(f(a))$$

$$3\gamma \;\; P(f(a)) \to P(f(f(a))) \quad 5$$

$$5a \;\; \neg P(f(a)) \;\; ↯ 4b \qquad 5b \;\; P(f(f(a))) \;\; ↯ 2b$$

Aufgabe 5 [12 PUNKTE]

(a) [6 PUNKTE] Berechnen Sie einen allgemeinsten Unifikator für folgende Menge an Literalen:

$$\{Q(x,z), Q(h(y,z), f(a)), Q(h(f(b),z),z)\}$$

(b) [6 PUNKTE] Zeigen Sie $\{\forall x\, \exists y.\, L(x,y), \forall x \forall y\, \big(L(x,y) \to H(x)\big)\} \models \forall x.\, H(x)$

Lösungsvorschlag:

(a)

Klausel	Klausel	Klausel	Modifikation
$Q(x,z)$	$Q(h(y,z),f(a))$	$Q(h(f(b),z),z)$	$\{x/h(y,z)\}$
$Q(h(y,z),z)$	$Q(h(y,z),f(a))$	$Q(h(f(b),z),z)$	$\{y/f(b)\}$
$Q(h(f(b),z),z)$	$Q(h(f(b),z),f(a))$	$Q(h(f(b),z),z)$	$\{z/f(a)\}$
$Q(h(f(b),f(a)),f(a))$	$Q(h(f(b),f(a)),f(a))$	$Q(h(f(b),f(a)),f(a))$	

(b) Die Behauptung ist äquivalent zur Unerfüllbarkeit von

$$\forall x\, \exists y.\, L(x,y) \land \forall u \forall v\, \big(L(u,v) \to H(u)\big) \land \neg\forall z.\, H(z)$$

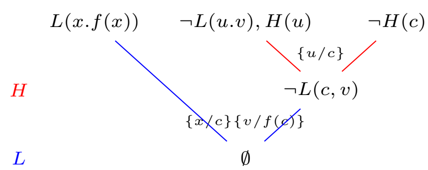
Umwandlung in PNF ergibt

$$\exists z\, \forall x\, \exists y\, \forall u\, \forall v.\, \Big(L(x,y) \land \big(L(u,v) \to H(u)\big) \land \neg H(z)\Big)$$

Daraus resultiert z.B. die SNF

$$\forall x\, \forall u\, \forall v.\, \Big(L(x,f(x)) \land \big(L(u,v) \to H(u)\big) \land \neg H(c)\Big)$$

deren quantorenfreier Teil sich für prädikatenlogische Resolution eignet:



Aufgabe 6 [12 PUNKTE]

Bestimmen sie explizite hybride Ableitungen im Kalkül $\mathcal{K}_0$ von

1. [4 PUNKTE] $(A \to B) \to C \vdash B \to C$
2. [8 PUNKTE] $A \to (B \to C) \vdash \neg C \to (B \to \neg A)$

Lösungsvorschlag:

(1)

0.	$(A \to B) \to C$	Ann.
1.	B	Ann.
2.	$B \to A \to B$	Ax1
3.	$A \to B$	MP, 1,2
4.	C	MP, 3,0
5.	$B \to C$	DT, 1–4

(2)

1.	$A \to B \to C$	Prä.
2.	$\neg C$	Ann.
3.	B	Ann.
4.	A	Ann.
5.	$B \to C$	MP, 4,1
6.	C	MP, 3,5
7.	$A \to C$	DT, 4–6
8.	$(A \to C) \to (\neg C \to \neg A)$	Th5
9.	$\neg C \to \neg A$	MP. 7,8
10.	$\neg A$	MP 2,9
11.	$B \to \neg A$	DT, 3–10
12.	$\neg C \to (B \to \neg A)$	DT, 2-11

Oder alternativ, etwas geschickter:

1.	$A \to B \to C$	Prä.
2.	$\neg C$	Ann.
3.	B	Ann.
4.	A	Ann.
5.	$B \to C$	MP, 4,1
6.	C	MP, 3,5
7.	$\bot$	6,2
8.	$\neg A$	IK 4–7
9.	$B \to \neg A$	DT, 3–8
10.	$\neg C \to (B \to \neg A)$	DT, 2–9

Aufgabe 7 [12 PUNKTE]

Wir betrachten nur endlich viele Variablen $V = \{p_0, \dots, p_{n-1}\}$. Eine Menge Σ aussagenlogischer Formen über V (alle Variablen stammen aus V) nennen wir *folgerungsmaximal*, wenn sie erfüllbar ist und für alle Formeln A über V gilt: Falls $A \notin \Sigma$, dann ist $\Sigma \cup \{A\}$ unerfüllbar.

1. Zeigen Sie: Für $n = 2$ Variablen ist die Formelmenge

$$\{p_0 \vee p_1, p_0 \vee \neg p_1, \neg p_0 \vee p_1, p_0, p_1\}$$

   nicht folgerungsmaximal.

2. Konstruieren Sie für eine Formelmenge Γ über V eine folgerungsmaximale Formelmenge Σ mit $\Gamma \subseteq \Sigma$.

3. Zeigen oder widerlegen Sie: Jede folgerungsmaximale Formelmenge ist unendlich.

Lösungsvorschlag:

1. Belegt man beide Atome mit 1, so wird auch $p_1 \wedge p_2$ erfüllt.

2. Bilde zunächst die Menge $\Gamma^{\rhd} \subseteq \mathbb{B}^{\mathcal{V}}$ aller Belegungen, die alle Formeln aus Γ erfüllen, und setze $\Sigma := \Gamma^{\rhd\lhd}$, die Menge aller Formeln in $\mathcal{V}$, die von allen Belegungen in $\Gamma^{\rhd}$ erfüllt werden (Hüllenoperator!).

3. Ist Σ folgerungsmaximal dann gilt für jedes $F \in \Sigma$ auch $\neg\neg F \in \Sigma$, und damit ist Σ unendlich.

Aufgabe 8 [12 PUNKTE]

Wir betrachten Strukturen $\mathcal{M} = \langle D, \mathcal{I} \rangle$ für die Signatur $\mathcal{S}$ mit dem binären Prädikat $\leq$ und dem unären Funktionssymbol f.

1. Konstruieren Sie eine Formel $F_{\leq}$, sodass $\mathcal{M}$ genau dann ein Modell ist, wenn $\leq^{\mathcal{M}}$ eine Halbordnung auf D ist.

2. Geben Sie eine unendliche Struktur $\mathcal{M}$ an, die Modell ist für

$$F = F_{\leq} \wedge \exists x \, \forall y \forall z. \big((y \leq z) \to (y = x \vee y = z)\big)$$

3. Geben Sie eine unendliche Struktur $\mathcal{M}$ an, die Modell ist von $F_{\leq}$ sowie

$$F_0 = \forall x \forall y. \big(x \leq y \to f(x) \leq f(y)\big)$$
$$F_1 = \exists x \forall y. \Big(f(x) \leq x \wedge \big(f(y) \leq y \to x \leq y\big)\Big)$$
$$F_2 = \exists z. \neg\big(f(z) \leq z\big)$$

Lösungsvorschlag:

1. Reflexivität: $F_r = \forall x.\ x \leq x$
   Transitivität: $F_t = \forall x\, \forall y\, \forall z.\ (x \leq y \wedge y \leq z \to x \leq z)$
   Antisymmetrie: $F_a = \forall x\, \forall y.\, (x \leq y \wedge y \leq x \to x \doteq y)$.

   $$F_{\leq} = F_r \wedge F_t \wedge F_a$$

2. Setze $D := \mathbb{N} + \{*\}$ und verlange, dass $\mathbb{N}$ durch $\mathcal{I}(\leq)$ diskret, d.h., durch $=$, geordnet und $*$ bzgl. $\mathcal{I}(\leq)$ ein kleinstes Element ist. Dass es sich um einen Halbordnung handelt ist klar, und der zweite Teil der Formel F ist ebenfalls klar (mit $*$ as besonderem Element x).

3. Die Funktion $f^{\mathcal{M}}$ soll monoton sein (F_0), ein kleinstes Element x mit $f(x) \leq x$ (Prä-Fixpunkt) haben (F_1), und muß mindestens ein Element z haben, das kein Prä-Fixpunkt ist (F_2), was insbesondere bedeutet, dass f nicht die Identität auf D sein darf.

   Beispiel: Setze

   $$\mathbb{N} \xrightarrow{f} \mathbb{N}, n \longmapsto \begin{cases} 1 \text{ falls } n = 0 \\ n \text{ sonst} \end{cases}$$

   Der kleinste Fixpunkt ist natürlich 1.

   Es gibt noch viele andere Beispiele!

Aufgabe 9 [12 PUNKTE]

Quiz:

Beantworten/Bewerten Sie die folgenden Fragen/Aussagen. Begründen Sie Ihre Antwort mit einem kurzen Beweis oder einem Gegenbeispiel.

1. Eine aussagenlogische Formelmenge Σ heißt *doppelt erfüllbar*, falls es mindestens zwei unterschiedliche Belegungen gibt, die Σ erfüllen. Wenn sowohl Γ als auch Δ jeweils doppelt erfüllbar sind, ist $\Gamma \cup \Delta$ dann erfüllbar?

2. Gegeben sei eine prädikatenlogische Formel F mit freien Variablen x und y, ein Term t und eine Konstante c. Stimmen die Formeln

   $$F[x/t][y/c] \quad \text{und} \quad F[y/c][x/t]$$

   syntaktisch überein?

3. Gegeben seien zwei aussagenlogische Formelmengen Σ und Γ, sodass $\Sigma \cup \Gamma$ nicht erfüllbar ist. Gibt es eine Formel F, sodass $\Sigma \models F$ und $\Gamma \models \neg F$?

4. Zwei binäre Junktoren $\sqcap$ und $\sqcup$ mögen für alle aussagenlogischen Formen A und B die Bedingung

   $$\neg A \sqcap \neg B \models\!\!\!\!\models \neg(A \sqcup B)$$

   erfüllen. Behauptung: $\{\sqcap, \neg\}$ ist genau dann eine vollständige Junktorenmenge, wenn dies für $\{\sqcup, \neg\}$ gilt.

Lösungsvorschlag:

1. Nein: wähle $\Gamma = \{p\}$ und $\Delta = \{\neg p\}$. Dann sind beide Mengen doppelt erfüllbar (der Wert einer Belegung auf $q \neq p$ ist beliebig), ihre Vereinigung ist aber nicht erfüllbar.

2. Nein, nur wenn die Variable y nicht im Term t vorkommt.

3. Wegen der Unerfüllbarkeit von $\Sigma \cup \Gamma$ sind die Mengen $\Sigma^{\triangleright}$ und $\Gamma^{\triangleright}$ der Belegungen, die Σ bzw. Γ erfüllen, disjunkt, denn

$$\emptyset = (\Sigma \cup \Gamma)^{\triangleright} = \Sigma^{\triangleright} \cap \Gamma^{\triangleright}$$

   Für jede Formel F ist $\mathbb{B}^{\mathcal{A}}$ disjunkte Vereinigung von $\{F\}^{\triangleright}$ und $\{\neg F\}^{\triangleright}$. Die Frage ist, ob die Mengen $\Sigma^{\triangleright}$ und $\Gamma^{\triangleright}$ durch eine Formel F separiert werden können.

   Sind $\Sigma^{\triangleright}$ und $\Gamma^{\triangleright}$ beide leer, so ist die Behauptung trivial.

   Ist eine dieser Mengen nichtleer, etwa $\Gamma^{\triangleright}$, so gilt $\mathcal{F}[\mathcal{A}] \neq \Gamma^{\triangleright\triangleleft}$. Wähle ein Element $H \notin \Gamma^{\triangleright\triangleleft}$.

   Nun ist $\Gamma \cup \{H\}$ nicht erfüllbar, also $\Gamma \models \neg H$.

   Andererseits folgt aus der Unerfüllbarkeit von $\Sigma \cup \Gamma$ sofort $\Sigma \cup \Gamma \models H$; insbesondere gibt es dann eine endliche Teilmenge $\{\, C_i \ : \ i < n \,\} \subseteq \Gamma$ mit $\Sigma \cup \{\, C_i \ : \ i < n \,\} \models H$. Das Deduktionstheorem liefert dann

$$\Sigma \models C_0 \to C_1 \to \cdots C_{n-1} \to H \;\;\models\!\!\!\!\Dashv\;\; \neg \bigwedge_{i<n} C_i \vee H =: F$$

   Andererseits gilt $\Gamma \models C_i$, $i < n$, wegen $\Gamma \models \neg H$ also

$$\Gamma \models \bigwedge_{i<n} C_i \wedge \neg H \;\;\models\!\!\!\!\Dashv\;\; \neg F$$

4. Ja, denn $A \sqcap B \models\!\!\!\Dashv \neg(\neg A \sqcup \neg B)$ und $A \sqcup B \models\!\!\!\Dashv \neg(\neg A \sqcap \neg B)$. Damit ist $\{\sqcap, \neg\}$ genau dann funktional vollständig, wenn dies für $\{\sqcup, \neg\}$ gilt.