Übungen zur Vorlesung
Programmanalyse
Blatt 7

Prof. Dr. Roland Meyer,
M. Sc. Sebastian Wolff
M. Sc. Elisabeth Neumann
Abgabe bis 20.12.2017 um 12 Uhr

Aufgabe 7.1 (Galois-Verbindungen)
Seien $(L, \leq_L)$ und $(M, \leq_M)$ vollständige Verbände. Zeigen Sie:

a) Ist $L' \subseteq L$ und (α, γ) eine Galois-Verbindung, so gilt $\alpha\left(\bigsqcup L'\right) = \bigsqcup \alpha\left(L'\right)$.

b) Zu jeder vollständig additiven Funktion $\alpha : L \to M$ gibt es eine Funktion $\gamma : M \to L$, so dass (α, γ) eine Galois-Verbindung ist.

Aufgabe 7.2 (Array-Bound-Analyse)
Angenommen, Sie untersuchen ein Programm, welches auf einem Array statischer Größe arbeitet. Das Programm verwaltet einen Zeiger, über den es auf einzelne Elemente des Arrays zugreifen kann. Wir nehmen an, dass der Zeiger einen Wert aus $\mathbb{Z}$ annimmt. Die tatsächliche Struktur des Arrays vernachlässigen wir und beschreiben sie stattdessen mit D. Der Datenbereich des Programms ist also $\mathbb{Z} \times \mathrm{D}$. Sie wollen nun wissen, ob das Programm die Grenzen des Arrays respektiert.

a) Geben Sie einen endlichen vollständigen Verband M an, der eine Array-Bound-Analyse ermöglicht. Geben Sie außerdem eine Galoisverbindung von $L := \mathbb{P}\left(\mathbb{Z} \times \mathrm{D}\right)$ nach M an.

b) Wie würden Sie bei einem dynamischen Array vorgehen? Welche Nachteile bringt dies mit sich?

Aufgabe 7.3 (Galois-Verbindungen)
Betrachten Sie als Datenbereich die Menge $\{0, 1\}^k$, also Binärstrings der Länge k. Geben Sie eine Extraktionsfunktion an, die diesen Datenbereich nach ganz $\mathbb{Z}$ abbildet. Welchen abstrakten Datenbereich würden Sie benutzen, um Integer-Überläufe zu erkennen?

Aufgabe 7.4 (Produkte von Galoisverbindungen)
Zeigen Sie:

1. Seien $(L_i, \leq_i)$ vollständige Verbände für $i \in \{1, 2, 3\}$ und seien α_i, γ_i Galoisverbindungen für $i \in \{1, 2\}$ mit $\alpha_i : L_i \to L_{i+1}$ und $\gamma_i : L_{i+1} \to L_i$. Dann ist $(\alpha_2 \circ \alpha_1, \gamma_1 \circ \gamma_2)$ eine Galoisverbindung zwischen $(L_1, \leq_1)$ und $(L_3, \leq_3)$.

2. Seien α_i, γ_i Galoisverbindungen für $i \in \{1, 2\}$ mit $\alpha_i : \mathbb{P}\left(V_i\right) \to \mathbb{P}\left(D_i\right)$ und $\gamma_i : \mathbb{P}\left(D_i\right) \to \mathbb{P}\left(V_i\right)$. Dann ist (α, γ) eine Galoisverbindung mit

$$\alpha : \mathbb{P}\left(V_1 \times V_2\right) \to \mathbb{P}\left(D_1 \times D_2\right) \quad \alpha(V') = \bigcup \{\alpha_1(\{v_1\}) \times \alpha_2(\{v_2\}) \mid (v_1, v_2) \in V'\}$$

$$\gamma : \mathbb{P}\left(D_1 \times D_2\right) \to \mathbb{P}\left(V_1 \times V_2\right) \quad \gamma(D) = \{(v_1, v_2) \mid \alpha_1(\{v_1\}) \times \alpha_2(\{v_2\}) \subseteq D\}.$$

3. Seien α_i, γ_i Galoisverbindungen für $i \in \{1, 2\}$ mit $\alpha_i : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(D_i)$ und $\gamma_i : \mathbb{P}(D_i) \to \mathbb{P}(V)$. Dann ist (α, γ) eine Galoisverbindung mit

$$\alpha : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(D_1 \times D_2) \qquad \alpha(V') = \bigcup \{\alpha_1(\{v\}) \times \alpha_2(\{v\}) \mid v \in V'\}$$

$$\gamma : \mathbb{P}(D_1 \times D_2) \to \mathbb{P}(V) \qquad \gamma(D) = \{v \mid \alpha_1(\{v\}) \times \alpha_2(\{v\}) \subseteq D\}.$$

Abgabe bis 20.12.2017 um 12 Uhr im Kasten neben Raum IZ 343