Übungen zur Vorlesung
Programmanalyse
Blatt 7

Prof. Dr. Roland Meyer,
M. Sc. Sebastian Wolff,
M. Sc. Peter Chini Abgabe bis 12.12.2018 um 12 Uhr

Aufgabe 7.1 (Galois-Verbindungen)
Geben Sie für die folgenden Paare (α, γ) jeweils an, ob es sich um eine Galoisverbindung handelt. Ist dies nicht der Fall, so geben Sie je ein Gegenargument oder Gegenbeispiel an.

	L	M	α	γ
a)	$(\mathbb{Z}_{\pm\infty}, \leq)$	$(\mathbb{P}(\mathbb{Z}), \subseteq)$	$z \mapsto \{z\}, -\infty \mapsto \emptyset, \infty \mapsto \mathbb{Z}$	$m \mapsto \bigsqcup\{z \mid z \in m\}$
b)	$(\mathbb{P}(\mathbb{Z}), \subseteq)$	$(\mathbb{Z}_{\pm\infty}, \leq)$	$l \mapsto \bigsqcup\{z \mid z \in l\}$	$z \mapsto \{z\}, -\infty \mapsto \emptyset, \infty \mapsto \mathbb{Z}$
c)	$(\mathbb{Z} \cup \{\perp, \top\}, \sqsubseteq)$	$(\mathbb{P}(\mathbb{Z}), \subseteq)$	$z \mapsto \{z\}, \top \mapsto \mathbb{Z}, \perp \mapsto \emptyset$	$m \mapsto \bigsqcup\{a \mid a \in m\}$
d)	$(\mathbb{Z}_{\pm\infty}, \leq)$	$\left(\mathbb{Z}^2_{\pm\infty}, \leq^2\right)$	$l \mapsto (l, l)$	$(l_1, l_2) \mapsto l_1$
e)	$\left(\mathcal{P}(\mathbb{R}^2), \subseteq\right)$	$\left(\operatorname{conv} \mathbb{R}^2, \subseteq\right)$	$l \mapsto \operatorname{conv}(l)$	$m \mapsto m$

Dabei sind

- $z \in \mathbb{Z}, l \in L, m \in M$.
- $\mathbb{Z}_{\pm\infty} := \mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}$, $-\infty \leq +\infty$ und für alle $z \in \mathbb{Z}$ gilt $-\infty \leq z$, $z \leq +\infty$.
- $z_1 \sqsubseteq z_2$ gdw. $z_1 = \perp \vee z_2 = \top$.
- $(l_1, l_2) \leq^2 (l_3, l_4)$ wenn $l_1 \leq l_3$ und $l_2 \leq l_4$ für $l_1, l_2, l_3, l_4 \in \mathbb{Z}_{\pm\infty}$.
- $\operatorname{conv} \mathbb{R}^2$ die *konvexen Mengen* über $\mathbb{R}^2$ bzw. $\operatorname{conv}(l)$ die *konvexe Hülle* von l. Eine Teilmenge $m \subseteq \mathbb{R}^2$ heißt konvex, wenn jede Verbindungsstrecke zwischen zwei Punkten in m selbst vollständig in m liegt. Die konvexe Hülle $\operatorname{conv}(l)$ is die kleinste konvexe Menge m, die l enthält.

Aufgabe 7.2 (Galois-Verbindungen)
Seien $(L, \leq_L)$ und $(M, \leq_M)$ vollständige Verbände. Zeigen Sie:

a) Ist $L' \subseteq L$ und (α, γ) eine Galois-Verbindung, so gilt $\alpha\left(\bigsqcup L'\right) = \bigsqcup \alpha(L')$.

b) Zu jeder vollständig additiven Funktion $\alpha : L \to M$ gibt es eine Funktion $\gamma : M \to L$, so dass (α, γ) eine Galois-Verbindung ist.

Aufgabe 7.3 (Array-Bound-Analyse)
Angenommen, Sie untersuchen ein Programm, welches auf einem Array statischer Größe arbeitet. Das Programm verwaltet einen Zeiger, über den es auf einzelne Elemente des Arrays zugreifen kann. Wir nehmen an, dass der Zeiger einen Wert aus $\mathbb{Z}$ annimmt. Die tatsächliche Struktur des Arrays vernachlässigen wir und beschreiben sie stattdessen mit D. Der Datenbereich des Programms ist also $\mathbb{Z} \times \mathrm{D}$. Sie wollen nun wissen, ob das Programm die Grenzen des Arrays respektiert.

a) Geben Sie einen endlichen vollständigen Verband M an, der eine Array-Bound-Analyse ermöglicht. Geben Sie außerdem eine Galoisverbindung von $L := \mathcal{P}(\mathbb{Z} \times \mathrm{D})$ nach M an.

b) Wie würden Sie bei einem dynamischen Array vorgehen? Welche Nachteile bringt dies mit sich?

Abgabe bis 12.12.2018 um 12 Uhr im Kasten neben Raum 343