

Übungen zur Vorlesung
 Programmanalyse
 Blatt 8

Prof. Dr. Roland Meyer,
 M. Sc. Sebastian Wolff,
 M. Sc. Peter Chini

Abgabe bis 19.12.2018 um 12 Uhr

Aufgabe 8.1 (Produkte und Kompositionen von Galoisverbindungen)

Beweisen Sie, dass die folgenden Produkte und Kompositionen von Galoisverbindungen wieder Galoisverbindungen definieren.

- a) Seien (L_i, \leq_i) vollständige Verbände für $i \in \{1, 2, 3\}$ und seien α_i, γ_i Galoisverbindungen für $i \in \{1, 2\}$ mit $\alpha_i : L_i \rightarrow L_{i+1}$ und $\gamma_i : L_{i+1} \rightarrow L_i$. Dann ist $(\alpha_2 \circ \alpha_1, \gamma_1 \circ \gamma_2)$ eine Galoisverbindung zwischen (L_1, \leq_1) und (L_3, \leq_3) .
- b) Seien α_i, γ_i Galoisverbindungen für $i \in \{1, 2\}$ mit $\alpha_i : \mathcal{P}(V_i) \rightarrow \mathcal{P}(D_i)$ und $\gamma_i : \mathcal{P}(D_i) \rightarrow \mathcal{P}(V_i)$. Dann ist (α, γ) eine Galoisverbindung mit

$$\alpha : \mathcal{P}(V_1 \times V_2) \rightarrow \mathcal{P}(D_1 \times D_2) \quad \alpha(V') = \bigcup_{(v_1, v_2) \in V'} \alpha_1(\{v_1\}) \times \alpha_2(\{v_2\}),$$

$$\gamma : \mathcal{P}(D_1 \times D_2) \rightarrow \mathcal{P}(V_1 \times V_2) \quad \gamma(D') = \{(v_1, v_2) \mid \alpha_1(\{v_1\}) \times \alpha_2(\{v_2\}) \subseteq D'\}.$$

Aufgabe 8.2 (Sichere Approximation)

Sei (α, γ) eine Galois-Verbindung zwischen L und M und $f : L \rightarrow L$ eine Funktion, sowie $f^\# : M \rightarrow M$ eine sichere Approximation von f . Angenommen, f und $f^\#$ sind monoton. Beweisen Sie folgende Äquivalenz.

$$\alpha \circ f \circ \gamma \leq f^\# \quad \text{gdw.} \quad \alpha \circ f \leq f^\# \circ \alpha$$

Aufgabe 8.3 (Abstrakte Interpretation)

Das folgende Programm berechnet die *Hailstone-Folge*.

```

while [x ≠ 1]1 do
  if [even(x)]2 then
    [x := ⌊x/2⌋]3
  else
    [x := 3x + 1]4

```

Berechnen Sie das Transitionssystem dieses Programms auf der abstrakten Domäne $\mathcal{P}(\{\text{odd}, \text{even}\})$. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

- a) Geben Sie zuerst sichere Approximationen für die Funktionen $x \mapsto \lfloor x/2 \rfloor$, $x \mapsto 3x + 1$ sowie die Prädikate $\text{even}(x)$ und $x \neq 1$ an.
- b) Bestimmen Sie das abstrakte Transitionssystem. Nutzen Sie als Startwert $\{\text{odd}\}$.

Abgabe bis 19.12.2018 um 12 Uhr im Kasten neben Raum 343