Theoretische Informatik 2

Aufgabenblatt 0, 2019-05-13

Hausaufgabe 1 [15 PUNKTE]

Verwenden Sie ggf. eine passende Reduktion, aber noch nicht den Satz von Rice:

(1) Das Universalitätsproblem ist spezifiziert durch

Universalitätsproblem (UNIV)
Gegeben: eine dTM M über $\{0,1\}$
zu entscheiden: ob M alle Eingaben w akzeptiert, d.h., ob $\mathcal{L}(M) = \{0,1\}^*$ gilt.

oder als Wortproblem:

$$\text{UNIV} = \{\, w \in \{0,1\}^* \;:\; \mathcal{L}(M_w) = \{0,1\}^* \,\}$$

Weisen Sie detailliert nach, dass UNIV nicht co-semi-entscheidbar ist, d.h., dass $\{0,1\}^* - \text{UNIV}$ nicht semi-entscheidbar ist.

(2) Untersuchen Sie folgende Sprache auf Unentscheidbarkeit:

$$L_{011} = \{\, w \in \{0,1\}^* \;:\; \mathcal{L}(M_w) = \{011\} \,\}$$

Hausaufgabe 2 [20 PUNKTE]

Ziel ist es, die Unentscheidbarkeit von UNIV zu zeigen.

(1) Wir betrachten eine dTM $M = \langle Q, \{0,1\}, \{0,1,\sqcup\}, \delta, , q_0, q_{\mathrm{acc}}, q_{\mathrm{rej}} \rangle$. Eine akzeptierende Berechnung ist eine Folge $\langle c_i \;:\; i < n \rangle$, so dass in c_{n-1} erstmals der Zustand q_{acc} angenommen wird. Die Folgenglieder wollen wir getrennt durch $\#$-Zeichen als Wort über einem geeigneten Alphabet auffassen. Konstruieren Sie einen Entscheider M'_M , der ein derartiges Wort genau dann akzeptiert, wenn es sich *nicht* um eine akzeptierende Berechnung von M auf ε handelt. [Hinweis. Bei den Eingaben für M' sind drei Fälle zu untersuchen.]

(2) Zeigen Sie auf möglichst einfache Weise, dass das folgende Problem

Nichtakzeptanz von ε (NOTACCEPT$_\varepsilon$)
Gegeben: eine dTM M über $\{0,1\}$
zu entscheiden: ob M die Eingabe ε nicht akzeptiert, d.h., ob $\varepsilon \notin \mathcal{L}(M)$ gilt.

nicht semi-entscheidbar ist.

(3) Beweisen Sie unter Verwendung von (1) und (2), dass UNIV aus der vorigen Aufgabe nicht semi-entscheidbar ist.

Hausaufgabe 3 [18 PUNKTE]

(1) [5 PUNKTE] Geben Sie einen Algorithmus an, der entscheidet, ob ein Post'sches Korrespondenzproblem mit $\Sigma = \{a\}$ lösbar ist.

Finden Sie 10 Lösungen des folgenden PCP s:

(2) [4 PUNKTE] $\left\langle \left[\frac{a}{aaa}\right], \left[\frac{abaa}{ab}\right], \left[\frac{ab}{b}\right] \right\rangle \in \{a,b\}^* \times \{a,b\}^*$.

(3) [9 SONDERPUNKTE] (wenn Sie zuviel Zeit haben.) $\left\langle \left[\frac{aba}{a}\right], \left[\frac{aa}{ab}\right], \left[\frac{a}{aaab}\right] \right\rangle \in \{a,b\}^* \times \{a,b\}^*$

Hausaufgabe 4 [15 PUNKTE]

Gegeben sei eine 2-Band-TM M über Σ. Wir definieren

$$\Sigma^* \xrightarrow{\boldsymbol{time}_M} \mathbb{N}, \quad x \longmapsto \begin{cases} n & \text{falls } M \text{ nach } n \text{ Schritten auf } x \text{ erstmals einen Haltezustand erreicht} \\ \bot & \text{sonst} \end{cases}$$

Für eine minimale Konfiguration $c = \langle u_0, u_1 | q | v_0, v_1 \rangle$, d.h., eine Konfiguration ohne überflüssige Blanks, setze $\boldsymbol{us}(c) = |u_1| + |v_1|$. Das liefert die partielle Funktion

$$\Sigma^* \xrightarrow{\boldsymbol{space}_M} \mathbb{N}, \quad x \longmapsto \begin{cases} \max_j \boldsymbol{us}(c_j) & M \text{ berechnet } x \text{ entlang } \langle c_j \,:\, j < k \rangle \\ \bot & \text{sonst} \end{cases}$$

Zeigen Sie mittels einer informellen Spezifikation,

(1) wie $\boldsymbol{time}_M$ berechnet werden kann;

(2) wie $\boldsymbol{space}_M$ berechnet werden kann.

(3) wie $\{0,1\}^* \times \{0,1\}^* \xrightarrow{\boldsymbol{time}_{-}(-)} \mathbb{N}, \langle w, x \rangle \longmapsto \boldsymbol{time}_{M_w}(x)$ berechnet werden kann.

Hausaufgabe 5 [16 PUNKTE]

Geben Sie für folgende Entscheidungsprobleme jeweils mit genauer Begründung an, ob der Satz von Rice anwendbar ist, und welche Schlussfolgerung Sie daraus ziehen.

(1) $L_{\text{inf}} = \{\, w \in \{0,1\}^* \,:\, \mathcal{L}(M_w) \text{ ist unendlich} \,\}$

(2) $L_{\text{tot}} = \{\, w \in \{0,1\}^* \,:\, M_w \text{ ist ein Entscheider} \,\}$

(3) $L_{\text{dec}} = \{\, w \in \{0,1\}^* \,:\, \mathcal{L}(M_w) \text{ ist entscheidbar} \,\}$

(4) $L_{\text{uncount}} = \{\, w \in \{0,1\}^* \,:\, \mathcal{L}(M_w) \text{ ist nicht abzählbar} \,\}$

Abgabe bis Dienstag, 2019-05-21, bis 14:45 Uhr, im Kasten neben IZ 343