Thomas Haas
Prof. Dr. Roland Meyer

Theoretische Informatik 2
Übungsblatt 3

TU Braunschweig
Sommersemester 2020

Ausgabe: 26.05.2020 Abgabe: 05.06.2020, 17:00

Geben Sie Ihre Lösungen bis Freitag, 05.06.2020 17:00 Uhr, per E-Mail an ihren Tutor ab. Fertigen Sie dazu ihre Hausaufgaben direkt in .pdf Form an oder scannen ihre handschriftlichen Hausaufgaben ein. Geben Sie in Gruppen von **4 Personen** ab.

Aufgabe 1: Operationen auf entscheidbaren Sprachen [6 Punkte]
Es seien $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 \subseteq \Sigma^*$ entscheidbare Sprachen.

Beweisen Sie:

1. Die Vereinigung $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$ ist entscheidbar.
2. Der Schnitt $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$ ist entscheidbar.
3. Die Konkatenation $\mathcal{L}_1.\mathcal{L}_2 = \{ww' \in \Sigma^* \mid w \in \mathcal{L}_1, w' \in \mathcal{L}_2\}$ ist entscheidbar.

Geben Sie dabei jeweils an, wie man einen Entscheider für die Sprachen konstruiert, und erläutern dessen Arbeitsweise. Eine formale Konstruktion und eine Angabe als Tupel ist hierbei nicht notwendig.

Hinweis: Die Bearbeitung dieser Aufgabe wird teilweise einfacher, wenn Sie Mehrband-Turing-Maschinen und Nichtdeterminismus verwenden.

Aufgabe 2: Ein nicht-semi-entscheidbares Problem [8 Punkte]
In der Vorlesung haben Sie gesehen, dass das Akzeptanzproblem unentscheidbar ist. Nun wollen wir ein Problem kennenlernen, das nicht einmal semi-entscheidbar ist.

Non-Self-Acceptance
Gegeben: Turing-Maschine M mit Eingabealphabet $\{0, 1\}$
Entscheide: Akzeptiert M ihre eigene Kodierung $\langle M \rangle$ nicht?

Als Sprache lässt sich das Problem wie folgt auffassen:

$$\mathcal{L}_{NSA} = \left\{w \in \{0,1\}^* \;\middle|\; \text{Die von } w \text{ codierte Turing-Maschine akzeptiert w nicht, d.h. } w \notin \mathcal{L}(M_w)\right\}.$$

1. Beweisen Sie unter Verwendung von Diagonalisierung, dass $\mathcal{L}_{NSA}$ nicht semi-entscheidbar ist.

2. Zeigen Sie, dass $\mathcal{L}_{NSA}$ co-semi-entscheidbar ist, d.h. beweisen Sie, dass das Komplementproblem semi-entscheidbar ist.

Aufgabe 3: Universality [8 Punkte]
Das Universalitätsproblem ist das folgende Entscheidungsproblem.

<u>Universalitätsproblem (UNIVERSALITY)</u>
Gegeben: Turing-Maschine M mit Eingabealphabet $\{0, 1\}$
Entscheide: Akzeptiert M alle Eingaben?

Dieses Problem lässt sich als folgende Sprache auffassen:

$$\mathcal{L}_{\text{Universality}} = \left\{ w \in \{0,1\}^* \;\middle|\; M_w \text{ akz. alle Eingaben } x \right\} = \left\{ w \in \{0,1\}^* \;\middle|\; \mathcal{L}(M_w) = \{0,1\}^* \right\} .$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{L}_{\text{Universality}}$ nicht co-semi-entscheidbar ist. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

Betrachten Sie hierzu das Komplementproblem $\overline{\mathcal{L}_{\text{Universality}}} = \{0,1\}^* \setminus \mathcal{L}_{\text{Universality}}$. Beschreiben Sie zunächst diese Sprache. Was bedeutet es für die Maschine M_w, wenn $w \in \overline{\mathcal{L}_{\text{Universality}}}$ gilt?

<u>Reduzieren</u> Sie ein Problem, von dem bekannt ist, dass es nicht semi-entscheidbar ist auf $\overline{\mathcal{L}_{\text{Universality}}}$.

Hinweis: Die Halte- und Akzeptanzprobleme, die wir kennen gelernt haben, sind semi-entscheidbar, aber nicht entscheidbar. Gemäß Theorem 3.20 im Skript sind sie also nicht co-semi-entscheidbar.

Aufgabe 4: Nicht-Semi-Entscheidbarkeit von Universalität [8 Punkte]
Nun wollen wir beweisen, dass das Universalitätsproblem nicht semi-entscheidbar ist.

1. Es sei $M = (Q, \{0, 1\}, \{0, 1, \sqcup\}, q_0, \delta, \{q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}}\})$ eine DTM.

   Eine akzeptierende Berechnung von M lässt sich als Wort kodieren, in dem man die Konfigurationen der Berechnung mit #-Symbolen getrennt hintereinander schreibt, also

   $$c_0 \# c_1 \# c_2 \# \dots \# c_k \, .$$

   Geben Sie an, wie man einen Entscheider M'_M konstruiert, welcher die Kodierung einer solchen Berechnung genau dann akzeptiert, wenn es sich nicht um eine akzeptierende Berechnung von M zur Eingabe ε handelt.

Hinweis: Eine Eingabe für M' kann entweder keine valide Kodierung einer Berechnung, oder eine akzeptierende, oder eine nicht-akzeptierende Berechnung sein.

2. Betrachten Sie das folgende Entscheidungsproblem.

   Nichtakzeptanz von ε
   Gegeben: Turing-Maschine M mit Eingabealphabet $\{0, 1\}$
   Entscheide: Akzeptiert M Eingabe ε nicht?

   Beweisen Sie, dass dieses Problem nicht semi-entscheidbar ist.

   Hinweis: Hierzu müssen Sie keine Reduktion verwenden.

3. Beweisen Sie, dass das Universalitätsproblem aus Aufgabe 2 nicht semi-entscheidbar ist.

   Führen Sie dazu eine Reduktion mit Hilfe der beiden vorherigen Teilaufgaben durch.

   Hinweis. Wenn eine Maschine M die Eingabe ε nicht akzeptiert, wie verhält sich dann die dazugehörige Maschine M'_M aus Teilaufgabe 1?