5. Großübung:

Zeitkomplexität:

Sei M eine TM und $x \in \Sigma^*$.

- $\mathrm{Time}_M(x) = \max\{\#\text{Transitionen in } p \mid p \text{ ist eine Berechnung von } M \text{ auf } x\}$

  Intuitiv: die Zeit, die M schlimmstenfalls braucht, um x zu verarbeiten.

- $\mathrm{Time}_M(n) = \max\{\mathrm{Time}_M(x) \mid |x| = n\}$
- M ist t-Zeit-beschränkt, falls $\mathrm{Time}_M(n) \leq t(n)\ \forall n \in \mathbb{N}$.

$$\mathrm{DTIME}_k(t(n)) = \left\{ L(M) \;\middle|\; \begin{array}{l} M \text{ ist eine } k\text{-Band} \\ \text{DTM, ein Entscheider} \\ \text{und } t\text{-Z-beschr.} \end{array} \right\}$$

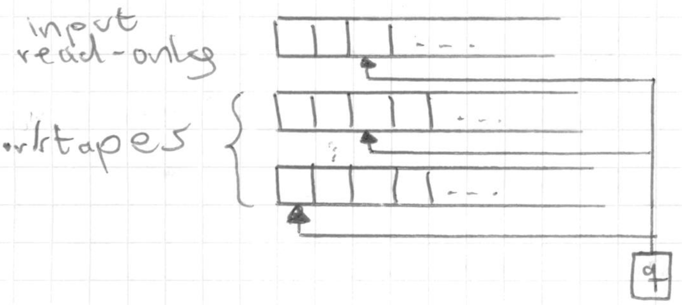
Analog: $\mathrm{NTIME}_k(t(n))$.

Bsp.:
$$P = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathrm{DTIME}(\mathcal{O}(n^k))$$

$$NP = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathrm{NTIME}(\mathcal{O}(n^k)).$$

Platzkomplexität:

Annahme: TM M hat ein zusätzliches read-only Eingabeband:



- Sei c eine Konfiguration von M.
  $\mathrm{Space}(c) = \max\{|w| \mid w \text{ Bandinhalt eines Worktapes in Konf. } c\}$
- Sei $x \in \Sigma^*$.
  $$\mathrm{Space}_M(x) = \max\left\{ \mathrm{Space}(c) \;\middle|\; \begin{array}{l} c \text{ ist Konfig., die in} \\ \text{einer Berechnung von } M \text{ auf} \\ x \text{ auftritt} \end{array} \right\}$$
- $\mathrm{Space}_M(n) = \max\{\mathrm{Space}_M(x) \mid |x| = n\}$.
- M ist s-Platz-beschr., falls $\mathrm{Space}_M(n) \leq s(n)\ \forall n \in \mathbb{N}$.

$$\mathrm{DSPACE}_k(s(n)) = \left\{ L(M) \;\middle|\; \begin{array}{l} M \text{ ist eine } k\text{-Band} \\ \text{DTM, ein Entscheider} \\ \text{und } s\text{-P-beschr.} \end{array} \right\}$$

Analog $\mathrm{NSPACE}_k(s(n))$

Bsp.: $NL = \mathrm{NSPACE}(\mathcal{O}(\log n))$

$$\mathrm{DPSPACE} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathrm{DSPACE}(\mathcal{O}(n^k)).$$

Einfache Zusammenhänge:

(1) $DTIME(t(n)) \subseteq NTIME(t(n))$

(2) $DSPACE(s(n)) \subseteq NSPACE(s(n))$

(3) $DTIME(t(n)) \subseteq DSPACE(t(n))$

(4) $NTIME(t(n)) \subseteq NSPACE(t(n))$

$\Rightarrow$
- $P \overset{(1)}{\subseteq} NP$
- $L \overset{(2)}{\subseteq} NL$
- $P \overset{(3)}{\subseteq} DPSPACE$
- $NP \overset{(4)}{\subseteq} NPSPACE$

Co-Klassen:

C eine Kompl. klasse über Σ.

$co\text{-}C := \{ L \subseteq \Sigma^* \mid \overline{L} \in C \}$ ist die Co-Klasse von C.

→ Wenn $C = DTIME(t(n))$ oder $C = DSPACE(s(n))$

$\Rightarrow C = co\text{-}C$.

Bew.: Für $C = DTIME(t(n))$ (anderer Fall analog).

„$\subseteq$": Sei $L \in C \Rightarrow L = L(M)$, M eine DTM, t-Z.-beschr.

Konstruiere t-Zeit-beschr. DTM $\overline{M}$ mit $L(\overline{M}) = \overline{L}$

Dann gilt: $\overline{L} \in DTIME(t(n)) = C \Rightarrow L \in co\text{-}C$.

→ $\overline{M}$ simuliert M, und dreht die Akzeptanz:

wenn M akz. → $\overline{M}$ weist ab
M abweist → $\overline{M}$ akz.

→ M DTM!

Dann gilt: $L(\overline{M}) = \overline{L}$.

„$\supseteq$": sei $L \in co\text{-}C$. Dann ist $\overline{L} \in C$, d.h.: $\overline{L} = L(M)$,
M eine DTM, t-Z-beschr.. Konstruiere $\overline{M}$ wie oben,
dann gilt: $L(\overline{M}) = \overline{\overline{L}} = L \Rightarrow L \in DTIME(t(n)) = C$. ∎

→ Seien $C_i, i \in I$ Kompl. klassen. Es gilt:

$$co\text{-}\bigcup_{i \in I} C_i = \bigcup_{i \in I} co\text{-}C_i.$$

Beweis:

„⊆": Sei $L \in co\text{-}\bigcup_{i\in I} C_i \Rightarrow \overline{L} \in \bigcup_{i\in I} C_i \Rightarrow$ es gibt ein $j \in I$ mit $\overline{L} \in C_j$.
$\Rightarrow L \in co\text{-}C_j$ und damit $L \in \bigcup_{i\in I} co\text{-}C_i$.

„⊇": Sei $L \in \bigcup_{i\in I} co\text{-}C_i$. Dann gibt es ein $j \in I$ mit $L \in co\text{-}C_j$.
$\Rightarrow \overline{L} \in C_j \Rightarrow \overline{L} \in \bigcup_{i\in I} C_i \Rightarrow L \in co\text{-}\bigcup_{i\in I} C_i$. ■

Folge:
- $co\text{-}P = co\text{-}\bigcup_{k\in\mathbb{N}} DTIME(\mathcal{O}(n^k))$

$= \bigcup_{k\in\mathbb{N}} co\text{-}DTIME(\mathcal{O}(n^k)) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} DTIME(\mathcal{O}(n^k)) = P$.

- $co\text{-}L = coDSPACE(\mathcal{O}(\log n)) = DSPACE(\mathcal{O}(\log n)) = L$.
- $co\text{-}PSPACE = PSPACE$
- $co\text{-}NP = co\text{-}\bigcup_{k\in\mathbb{N}} NTIME(\mathcal{O}(n^k)) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} co\text{-}NTIME(\mathcal{O}(n^k))$

$\neq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} NTIME(\mathcal{O}(n^k)) = NP$. ??? offen, ob $NP = coNP$.

NL:

Sei $G = (\overset{\text{Knoten}}{V}, \underset{\text{Kanten}}{E})$ ein Graph. Eine starke Zusammenhangskomponente (SCC) ist eine Teilmenge $U \subseteq V$ von Knoten, so dass für je zwei $x, y \in U$ gilt: es gibt einen Pfad von x nach y und von y nach x.

SCC-Detect

Geg.: Graph G und Knoten x, y

Entscheide: Liegen x, y in der gleichen SCC?

SCC-Detect $\in$ NL.

→ Wir wissen: PATH $\in$ NL. Sei M die NTM, die PATH entscheidet.

~~Konstr~~uiere NTM N wie folgt:

(1) N testet, ob es einen Pfad von x nach y gibt, indem sie M simuliert.
Wenn M abw. → weise ab
Wenn M akz. → fahre fort

(2) Teste mit M, ob es einen Pfad von y nach x gibt.
Wenn M abw → weise ab
Wenn M akz. → akz.

Der Platz von (1) kann in (2) wieder genutzt werden. Da M log-Platz-beschr., ist auch N log-Platz-beschr.

⇒ SCC-Detect $\in$ NL.

[SCC-Undetect := $\overline{\text{SCC-Detect}}$ liegt in coNL.
↳ Geg.: Graph G und Knoten x, y
Entscheide: liegen x, y in verschiedenen SCCs?]

Betrachte 3-SCC: Geg.: Graph G
Entscheide: Hat G mindestens (≥3) 3 SCCs?

3-SCC $\in$ coNL: Idee: ~~finde alle 3~~ zeige, dass $\overline{\text{3-SCC}} \in$ NL.

Was ist $\overline{\text{3-SCC}}$? → Geg.: Graph G
Ent.: Hat G höchstens ~~2~~ (<3) maximale SCCs?

Idee: gehe durch alle 3-Tupel (v_1, v_2, v_3) von Knoten und teste, ob ~~je~~ zwei davon in einer SCC liegen, denn:

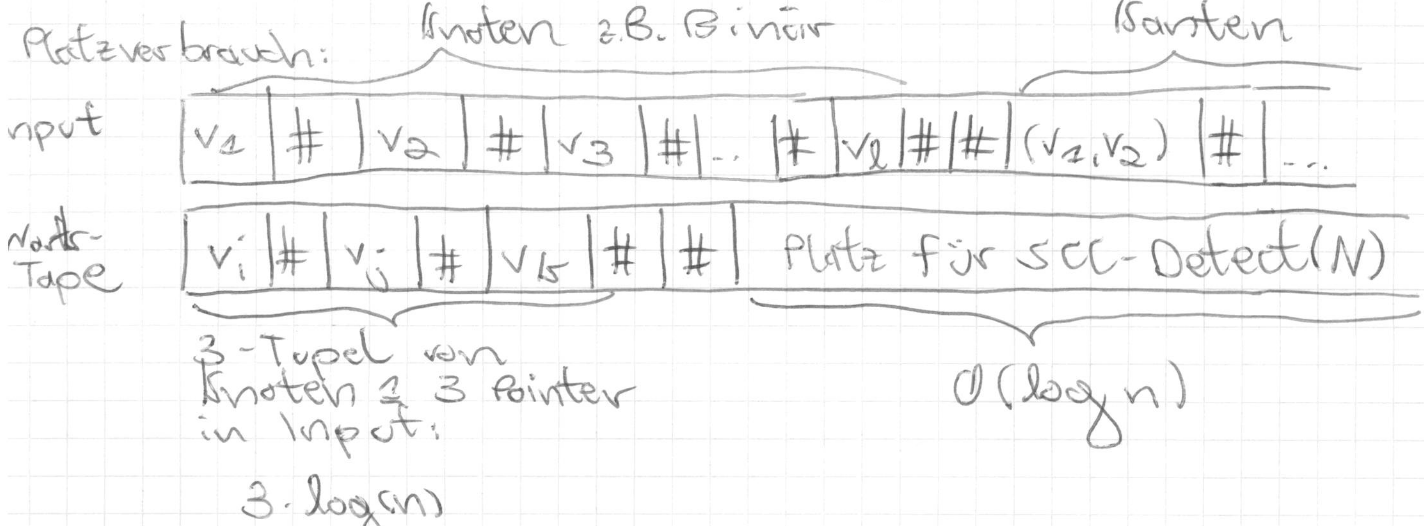
~~Work-Tape~~

G hat ≤2 SCCs ⟺ Für je drei Knoten x, y, z liegen x, y oder y, z oder x, z in einer SCC.

Turing-Maschine:

- Iteriere über alle (v_1, v_2, v_3).
- ~~Teste~~ Simuliere N auf v_1, v_2, auf v_2, v_3 und v_1, v_3.
  Wenn N eines der Paare akz. => gehe zum nächsten Tupel.
  wenn N abw. → weise ab.
- ~~Wenn N in jeder Iteration akz. hat, akz.~~
- Wenn die Iteration nicht abgebrochen hat → akz.

Platzverbrauch:



Zusammen: $\mathcal{O}(\log n)$, also ist

$\overline{3\text{-SCC}} \in NL \Rightarrow 3\text{-SCC} \in coNL$.

I&S $NL = coNL$ $\Rightarrow 3\text{-SCC} \in NL$.