Prof. Dr. Roland Meyer
Sebastian Muskalla, Peter Chini

Theoretische Informatik II
Aufgabenblatt 1

TU Braunschweig
Sommersemester 2017

Ausgabe: 5. April — Abgabe: 13. April

Werfen Sie Ihre Lösungen bis Donnerstag, 13. April, 12:00 Uhr in die Abgabekästen im Informatikzentrum neben Büro 343. Geben Sie zu dritt oder zu viert ab.

Mehr Details zu den Anmeldungen finden Sie auf unserer Website.

Aufgabe 1: Reguläre Sprachen

Sei Σ für diese Aufgabe ein festes endliches Alphabet.

a) Sei RegEx_Σ die Menge aller regulären Ausdrücke über Σ. Zu einem regulären Ausdruck $r \in \mathrm{RegEx}_\Sigma$ sei $\mathcal{L}(r)$ die von ihm repräsentierte Sprache. Sei $\leq$ eine Relation auf RegEx_Σ, die wie folgt definiert ist:

$$r \leq r' \text{ gdw. } \mathcal{L}(r) \subseteq \mathcal{L}(r').$$

Hierbei ist $\mathcal{L}(r) \subseteq \Sigma^*$ die reguläre Sprache, die von r repräsentiert wird.

Beweisen Sie, dass $\leq$ reflexiv und transitiv, allerdings nicht antisymmetrisch ist.

b) Sei $\mathrm{REG}_\Sigma \subseteq \mathcal{P}(\Sigma^*)$ die Menge aller regulären Sprachen über Σ. Sei $\subseteq$ die Teilmengenbeziehung.

Beweisen Sie, dass $(\mathrm{REG}_\Sigma, \subseteq)$ ein Verband, allerdings nicht vollständig ist. Geben Sie insbesondere konkret an, wie der Join $\mathcal{L} \sqcup \mathcal{L}'$ und Meet $\mathcal{L} \sqcap \mathcal{L}'$ von zwei Sprachen definiert sind.

c) Sei $\mathcal{L} \in \mathrm{REG}_\Sigma$ eine feste reguläre Sprache. Beweisen Sie, dass die beiden wie folgt definierten Funktionen monoton auf dem Verband aus Aufgabenteil b) sind:

$$f(x) = x \cup \mathcal{L} \qquad\qquad g(x) = x.\mathcal{L}\,.$$

Hinweis: Die grundlegenden Definitionen zu regulären Sprachen, die für diese Aufgabe benötigt werden, können Sie im Skript zu Theoretische Informatik I auf unserer Website nachschlagen.

Bitte umdrehen!

Aufgabe 2: Verbände

a) Sei $\mathcal{D} = (D, \leq)$ ein vollständiger Verband. Wie üblich sei $\perp$ das kleinste Element von $\mathcal{D}$, d.h. für alle $d \in D$ gilt $\perp \leq d$. Beweisen Sie formal, dass gilt

$$\perp = \bigsqcup \varnothing = \bigsqcap D\,.$$

b) Seien $\mathcal{D}_1 = (D_1, \leq_1)$ und $\mathcal{D}_2 = (D_2, \leq_2)$ Verbände.

Beweisen Sie, dass $\mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2 = (D_1 \times D_2, \leq)$ ein Verband ist, wobei die Relation $\leq$ wie folgt definiert ist:

$$(d_1, d_2) \leq (d_1', d_2') \text{ gdw. } d_1 \leq_1 d_1' \text{ und } d_2 \leq_2 d_2'\,.$$

Beweisen Sie hierfür insbesondere, dass $\leq$ eine partielle Ordnung auf $D_1 \times D_2$ ist.

c) Sei $\mathcal{D} = (D, \leq)$ ein endlicher Verband, d.h. D ist eine endliche Menge.

Beweisen Sie, dass $\mathcal{D}$ vollständig ist.

Aufgabe 3: Distributivität

Es seien $\mathcal{D} = (D, \leq)$ ein Verband und $f\colon D \to D$ eine Funktion.

a) Seien $x, y \in D$. Zeigen Sie: Wenn f monoton ist, dann gilt $f(x \sqcup y) \geq f(x) \sqcup f(y)$.

b) Wir nennen f **distributiv**, wenn $f(x \sqcup y) = f(x) \sqcup f(y)$ für alle $x, y \in D$ gilt.

Zeigen Sie: Wenn f distributiv ist, dann ist f auch monoton.