Theoretische Informatik II
Aufgabenblatt 2

Prof. Dr. Roland Meyer
Sebastian Muskalla, Peter Chini
TU Braunschweig
Sommersemester 2017

Ausgabe: 19. April | Abgabe: 27. April

Werfen Sie Ihre Lösungen bis Donnerstag, 27. April, 12:00 Uhr in die Abgabekästen im Informatikzentrum neben Büro 343. Geben Sie zu dritt oder zu viert ab.

Aufgabe 1: „Reachable Values"-Analyse

Betrachten Sie das links stehende Bool'sche Programm.

```
[x := true]^1
[y := true]^2
while [x]^3 do
    [y := ¬x]^4
    if [¬y]^5 then
        [x := ¬x]^6
    else
        [x := ¬y]^7
    end if
end while
[skip]^8
```

Untersuchen Sie für jeden Block, welche Belegungen die Variablen am Eingang annehmen können. Benutzen Sie dazu das Datenflusssystem $S = \big(G, (D, \subseteq), i, TF\big)$, mit $D = \mathcal{P}\big(\{false^x, true^x, false^y, true^y\}\big)$ und $i = \{false^x, false^y\} \in D$, und gehen Sie wie folgt vor:

a) Zeichnen Sie den zugehörigen Kontrollflussgraphen G.

b) Geben Sie die Familie der monotonen Transferfunktionen

$$TF = \{f_i : D \to D \mid i \in \{1, \dots, 8\}\}$$

an, wobei f_i den Effekt des Blocks mit Label i im Abstrakten imitiert. Hierbei überapproximieren wir und berücksichtigen die Bedingungen (z.B. von Schleifen) nicht.

c) Geben Sie das durch S induzierte Gleichungssystem an.

d) Lösen Sie das Gleichungssystem mit Hilfe des Satzes von Kleene.

Aufgabe 2: Turing-Maschinen

a) Zeigen Sie, dass es zu jeder regulären Sprache $\mathcal{L} \subseteq \Sigma^*$ eine Turing-Maschine M mit $\mathcal{L} = \mathcal{L}(M)$ gibt. Geben Sie explizit und formal an, wie man aus einem endlichen Automaten A für $\mathcal{L}$ die Maschine M konstruiert.

b) Betrachten Sie die Turing-Maschine

$$M = (Q, \{a, b, \#\}, \{a, b, \#, \$, \sqcup, X\}, \delta, q_0)\,.$$

Hierbei ist die Zustandsmenge $Q = \{q_0, q_{acc}, q_{rej}, q_{finda}, q_{findb}, q_{seena}, q_{seenb}, q_{check}, q_{reset}\}$ und die Transitionsfunktion δ ist durch die Tabelle auf Seite 3 des Aufgabenblatts gegeben. Hierbei sind die Zeilen der Tabelle als $\delta(q, a) = (p, b, d)$ zu lesen. Zustände q und Symbole a, die in der Tabelle keinen entsprechenden Eintrag haben, werden von der Maschine nicht verändert, die entsprechende Transition ist $\delta(q, a) = (q, a, R)$.

Was ist die von M akzeptierte Sprache $\mathcal{L}(M) \subseteq \{a, b, \#\}^*$? Beschreiben Sie die Arbeitsweise von M. Erklären Sie insbesondere, welchen Sinn jeder der 9 Zustände hat.

Hinweis: Sie finden im Internet graphische Simulatoren für Turing-Maschinen, die zur Bearbeitung dieser Aufgabe nützlich sein können. Beispielsweise ist eine leicht modifizierte Version der Maschine aus der Aufgabenstellung unter der folgenden URL zu finden:
`http://morphett.info/turing/turing.html?8ce37066a45b98219e921dd1f7047846`
Beachten Sie, dass sich die Konventionen und Notationen der Simulatoren von denen aus der Vorlesung unterscheiden (z.B. gibt es im Beispiel keinen Endmarker).

Aufgabe 3: Sprache $a^n b^n c^n$
Ihnen ist aus Theoretische Informatik I bekannt, dass die Sprache

$$\mathcal{L} = \left\{a^n b^n c^n \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\} \subseteq \left\{a, b, c\right\}^*$$

nicht kontextfrei ist. Konstruieren Sie eine Turing-Maschine M für diese Sprache, d.h. $\mathcal{L} = \mathcal{L}(M)$. Geben Sie sowohl eine formale Beschreibung als Tupel $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0)$, als auch eine ausführliche Beschreibung der Arbeitsweise von M an.

Aufgabe 4: Maschinen mit beidseitig unendlichem Band
Turing-Maschinen gemäß der Definition aus der Vorlesung haben ein nur nach rechts unendliches Band. Die Bedingung

$$(1) \qquad \forall q \in Q\, \exists q' \in Q\colon \delta(q, \$) = (q', \$, R)$$

in der Definition verhindert, dass wir den linken Endmarker überschreiben oder das Band links von ihm verwenden.

In dieser Aufgabe möchten wir Maschinen betrachten, die ein nach beiden Seiten unendliches Band haben. Diese Maschinen haben keinen linken Endmarker, dementsprechend entfällt obige Bedingungen (1). Wir gehen davon aus, dass zur Eingabe $w \in \Sigma^*$ die Startkonfiguration $\ldots \sqcup\sqcup w \sqcup\sqcup \ldots$ ist, wobei der Kopf auf den ersten Buchstaben von w zeigt. (Akzeptierende) Konfigurationen, Berechnungen und die Sprache solcher Maschinen sind analog zu normalen Turing-Maschinen definiert.

Zeigen Sie:
Zu jeder Maschine mit beidseitig unendlichem Band $M_\leftrightarrow$ gibt es eine Turing-Maschine M, so dass M die Maschine $M_\leftrightarrow$ Schritt-für-Schritt simuliert. Das heißt, für jede Eingabe gibt es zu jedem Berechnungsschritt, den $M_\leftrightarrow$ macht, einen entsprechenden Berechnungsschritt von M, und die resultierende Konfiguration von $M_\leftrightarrow$ ist akzeptierend, genau dann wenn die resultierende Konfiguration von M akzeptierend ist.

Hinweis: Wählen Sie das Bandalphabet Γ von M so, dass es Tupel von Buchstaben speichert.
Hierbei codiert eine Komponente Buchstaben, die sich in der rechten Hälfte,
die andere Komponente Buchstaben die sich in der linken Hälfte des Bandes befinden. Welche Komponente von M gelesen geschrieben werden soll, lässt sich im Kontrollzustand speichern.

Transitionsfunktion δ für Aufgabe 3:

q	a	p	b	d
q_0	a	q_{seena}	X	R
q_0	b	q_{seenb}	X	R
q_0	#	q_{check}	X	R
q_0	$\sqcup$	q_{rej}	$\sqcup$	R
q_{seena}	#	q_{finda}	#	R
q_{seena}	$\sqcup$	q_{rej}	$\sqcup$	R
q_{seenb}	#	q_{findb}	#	R
q_{seenb}	$\sqcup$	q_{rej}	$\sqcup$	R
q_{finda}	#	q_{rej}	#	R
q_{finda}	$\sqcup$	q_{rej}	$\sqcup$	R
q_{finda}	b	q_{rej}	b	R
q_{finda}	a	q_{reset}	X	L
q_{findb}	#	q_{rej}	#	R
q_{findb}	$\sqcup$	q_{rej}	$\sqcup$	R
q_{findb}	a	q_{rej}	a	R
q_{findb}	b	q_{reset}	X	L
q_{reset}	\$	q_0	\$	R
q_{reset}	#	q_{reset}	#	L
q_{reset}	a	q_{reset}	a	L
q_{reset}	b	q_{reset}	b	L
q_{reset}	X	q_{reset}	X	L
q_{check}	$\sqcup$	q_{acc}	$\sqcup$	R
q_{check}	a	q_{rej}	a	R
q_{check}	b	q_{rej}	b	R
q_{check}	#	q_{rej}	#	R