Sommersemester 2018 17.04.2018

Übungen zur Vorlesung
Theoretische Informatik II
Blatt 2

Prof. Dr. Roland Meyer, M. Sc. Elisabeth Neumann Abgabe bis 25.04.2018 um 12:00

Aufgabe 2.1

a) Konstruieren Sie eine Turing-Maschine, die einen *binären Inkrement* implementiert. Das heißt, die Turing-Maschine nimmt als Eingabe ein Wort $w \in \{0,1\}^*$, welches die Binärdarstellung einer Zahl i ist, und berechnet eine Binärdarstellung w' der Zahl $i+1$.

Der Einfachheit halber ist es sinnvoll hier – anders als üblich – eine *least significant bit first (lsbf)* Darstellung zu wählen, d.h. z.B. $6_{10} = 011_2$.

b) Konstruieren Sie eine Turing-Maschine, die als Eingabe eine Sequenz

$$1^n = \underbrace{1 \dots 1}_{n \text{ Mal}} \in \{1\}^*$$

von n Einsen erhält, und $bin(n)$, eine lsbf-Binärdarstellung von n, berechnet.

Hinweis: Verwenden Sie Teilaufgabe a).

Geben Sie für beide Teilaufgaben die Maschine jeweils sowohl formal als Tupel $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, \delta, Q_F)$ als auch eine ausführliche Beschreibung der Arbeitsweise von M an.

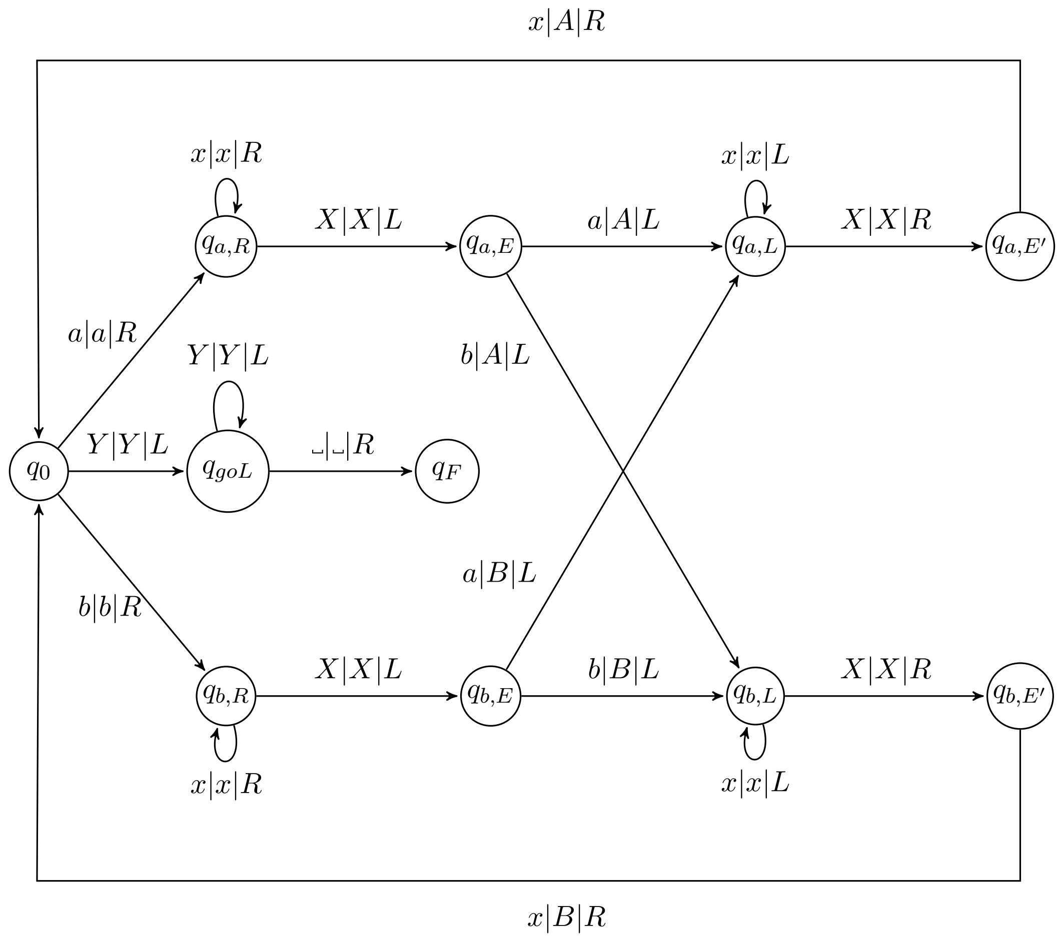
Aufgabe 2.2

a) Zeigen Sie, dass es zu jeder regulären Sprache $\mathcal{L} \subseteq \Sigma^*$ eine Turing-Maschine M mit $\mathcal{L} = \mathcal{L}(M)$ gibt. Geben Sie explizit und formal an, wie man aus einem endlichen Automaten A für $\mathcal{L}$ die Maschine M konstruiert.

b) Betrachten Sie die Turing-Maschine

$$M = (Q, \{a,b\}, \{a,b,A,B,\text{␣}\}, q_0, \delta, \{q_F\})$$

wobei $Q = \{q_0, q_{a,R}, q_{b,R}, q_{a,L}, q_{b,L}, q_{E,a}, q_{E,b}, q_{E',a}, q_{E',b}, q_{goL}, q_F\}$ und δ gegeben ist durch folgenden Graphen.



Hierbei verwenden wir $X \in \{A, B, ␣\}$, $Y \in \{A, B\}$ und $x \in \{a, b\}$.

Geben Sie die berechnete (partielle) Funktion an und eine informelle Beschreibung der Arbeitsweise der Turing-Maschine. Beschreiben Sie dabei kurz welche "Aufgaben" die einzelnen Zustände haben.

Aufgabe 2.3

Für die Lösung dieser Aufgabe möchten wir **Mehrband-Turingmaschinen** verwenden. Sei $k \in \mathbb{N}, k > 0$. k-Band-Turing-Maschinen sind analog zu Turing-Maschinen definiert, allerdings haben sie k Bänder und einen Kopf pro Band. Dementsprechend hat die Transitionsfunktion nun die Signatur

$$\delta \colon Q \times \Gamma^k \to Q \times \Gamma^k \times \{L, R, N\}^k \ ,$$

d.h. die Maschine liest in jedem Schritt auf jedem Band die Zelle an der aktuellen Kopfposition, modifiziert diese Zellen und kann die Köpfe unabhängig voneinander bewegen.

In der Initialkonfiguration einer solchen Maschine enthält das erste Band die Eingabe (und der Kopf steht auf dem ersten Symbol) und alle anderen Bänder sind leer.
Eine Eingabe $w \in \Sigma^*$ wird von einer Mehrband-TM akzeptiert, falls eine Konfiguration mit einem Endzustand erreicht wird. Für Mehrband-Turingmaschinen, die eine partielle Funktion implementieren gilt, analog zu Einband-Turingmaschinen, dass $f(w) = w'$ gdw. ein Endzustand erreicht wurde und auf dem ersten Band w' steht, wobei der Kopf des ersten Bandes auf das erste Symbol von w' zeigt.

a) Konstruieren Sie eine Mehrband-Turingmaschine für die Sprache

$$\mathcal{L} = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid |w|_a = |w|_b = |w|_c\}.$$

b) Konstruieren Sie eine Mehrband-Turingmaschine, welche die Funktion

$$f : \{0,1\}^* \rightarrow_p \{0,1\}^*$$
$$w \mapsto \begin{cases} \mathsf{bin}(w_1) + \mathsf{bin}(w_2), \text{ falls } w = w_1.w_2 \text{ mit } |w_1| = |w_2| \\ \mathsf{undef}., \text{ sonst.} \end{cases}$$

implementiert.

Geben Sie für beide Teilaufgaben die Anzahl der verwendeten Bänder, eine ausführliche Beschreibung der Arbeitsweise von M und die Maschine formal als Tupel $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, \delta, Q_F)$ an.

Abgabe bis 25.04.2018 um 12:00 im Kasten neben Raum 343.