WS 2016 / 2017 22.11.2016

Übungen zur Vorlesung
Theoretische Informatik I
Blatt 3

Prof. Dr. Roland Meyer
M.Sc. Sebastian Muskalla
M.Sc. Peter Chini

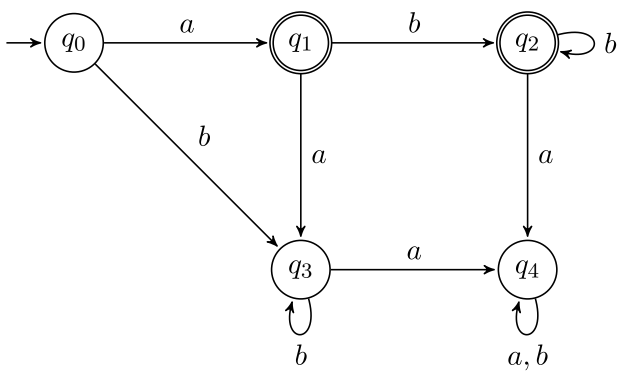
Abgabe bis 28.11.2016 um 12 Uhr

Aufgabe 3.1 (Äquivalenzrelation)
Es sei $A = (Q, q_0, \to, Q_F)$ ein DFA. Die Relation $\equiv_A \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ ist definiert durch:

$$u \equiv_A v, \text{ falls es ein } q \in Q \text{ gibt, mit } q_0 \xrightarrow{u} q \text{ und } q_0 \xrightarrow{v} q.$$

Zeigen Sie, dass $\equiv_A$ eine Äquivalenzrelation auf Σ^* ist.

Aufgabe 3.2 (Minimalisierung)
Benutzen Sie den Algorithmus aus der Vorlesung, um den folgenden DFA zu minimalisieren. Geben Sie auch die Reihenfolge an, in der Sie die Tabelle ausfüllen.



Aufgabe 3.3 (Pumping Lemma)
Beweisen Sie, dass die Sprache $L = \{a^{(n^2)} \in a^* \mid n \in \mathbb{N}\}$ nicht regulär ist.
Hinweis: Sei $p \in \mathbb{N}$. Überlegen Sie sich, wie viele Quadratzahlen es zwischen den Zahlen p^2 und $p^2 + p$ geben kann.

Aufgabe 3.4 (Isomorphiesatz)
Es sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine reguläre Sprache mit Index$(\equiv_L) = k \in \mathbb{N}$. Zudem seien $A = (Q, q_0, \to, Q_F)$ ein DFA mit $L = L(A)$ und $|Q| = k$, und $A_L = (Q_L, q_{0L}, \to_L, Q_{FL})$ der minimale DFA für L aus dem Satz von Myhill-Nerode.
Es seien $u_1, \ldots, u_k$ Repräsentanten für die Äquivalenzklassen von $\equiv_L$. Im Folgenden sollen Sie zeigen, dass die Abbildung

$$\beta : Q_L \to Q$$
$$[u_i]_{\equiv_L} \to q \in Q \text{ mit } q_0 \xrightarrow{u_i} q$$

ein Isomoprhismus zwischen A_L und A ist.

a) Es gilt $\equiv_A \subseteq \equiv_L$. Zeigen Sie, dass tatsächlich $\equiv_A = \equiv_L$ gilt.
Hinweis: Verwenden Sie folgenden Fakt. Wenn $\equiv_A \subseteq \equiv_L$ *und* $\mathrm{Index}(\equiv_A) = \mathrm{Index}(\equiv_L)$, *dann gilt auch* $\equiv_A = \equiv_L$.

b) Zeigen Sie, dass β wohldefiniert ist.
Hinweis: Die Abbildung β *wurde auf Äquivalenzklassen definiert. Man muss zeigen, dass* β *unabhängig von der Wahl der Repräsentaten* $u_1, \ldots, u_k$ *ist. Dazu nimmt man an, dass* $\hat{u}_i \equiv_L u_i$. *Nun zeigt man, dass* $\beta([\hat{u}_i]_{\equiv_L}) = \beta([u_i]_{\equiv_L})$.

c) Beweisen Sie, dass β eine Bijektion zwischen Q_L und Q ist.

d) Zeigen Sie, dass β einen Isomorphismus zwischen Automaten definiert.
Hinweis: Man muss noch zeigen, dass $\beta(q_{0L}) = q_0$, $\beta(Q_{FL}) = Q_F$ *und für alle* $p, p' \in Q_L$ *und* $a \in \Sigma$ *gilt:* $p \xrightarrow{a}_L p'$ *genau dann, wenn* $\beta(p) \xrightarrow{a} \beta(p')$.

Abgabe bis 28.11.2016 um 12 Uhr im Kasten neben Raum 343.