1. Notizen zu Nichtstandardmodellen

Zusätzlich zu den handschriftlichen Notizen präsentieren wir hier eine detailliertere Ausarbeitung zu Nichtstandardmodellen.

Beispielsweise zeigen wir hier die Existenz eines Nichtstandardmodells der Arithmetik. Unendliche Strukturen haben immer Nichtstandardmodelle, und die Art und Weise wie ihre Existenz bewiesen wird, folgt meistens dem gleichen Schema, welches hier vorgestellt wird.

A) Der Kompaktheitssatz der Prädikatenlogik erster Stufe

Das wichtigste Werkzeug für den Beweis der Existenz von Nichtstandardmodellen ist der **Kompaktheitssatz der Prädikatenlogik (erster Stufe)**.

1.1 Satz
Sei $\Sigma \subseteq \mathrm{FO}(S)$ eine Menge von Formeln, sei $A \in \mathrm{FO}(S)$ eine Formel. Dann gilt:

a) Σ ist erfüllbar, gdw. jede endliche Teilmenge $\Sigma^{fin} \subseteq \Sigma$ erfüllbar ist.

b) Σ ist unerfüllbar, gdw. es eine endliche Teilmenge $\Sigma^{fin} \subseteq \Sigma$ gibt, die unerfüllbar ist.

c) $\Sigma \models A$ gilt, gdw. es eine endliche Teilmenge $\Sigma^{fin} \subseteq \Sigma$ gibt, so dass $\Sigma^{fin} \models A$ gilt.

Der Beweis funktioniert, in dem man die Formeln in Σ geeignet transformiert (Gleichheit eliminieren, Skolemform), die Herbrand-Expansion anwendet und dann den Kompaktheitssatz der Aussagenlogik verwendet. Für die Details verweisen wir auf die entsprechenden handschriftlichen Aufzeichnungen.

B) Nichtstandardmodell der Arithmetik

Sei S eine Signatur, und sei $\mathcal{M} = (D, \mathcal{I})$ eine S-Struktur. Ein **Nichtstandardmodell** zu $\mathcal{M}$ ist eine Struktur $\mathcal{N}$, welche die selben abgeschlossen Formeln erfüllt, sich auf den nicht-abgeschlossenen Formeln aber anders verhält. Wir werden dies im Folgenden präzisieren.

Wir bezeichnen mit $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$ die Menge aller abgeschlossenen Formeln, die von $\mathcal{M}$ wahr gemacht werden, also

$$\mathcal{T}_{\mathcal{M}} = \left\{ A \in \mathrm{FO}(S) \;\middle|\; A \text{ abgeschlossen}, \mathcal{M}[\![A]\!] = 1 \right\}.$$

(Diese Menge wird auch die **Theorie von** $\mathcal{M}$ genannt.)

Wir wollen nun eine Struktur $\mathcal{N}$ finden mit $\mathcal{T}_{\mathcal{M}} = \mathcal{T}_{\mathcal{N}}$, die sich auf den nicht-abgeschlossenen Formeln anders verhält als $\mathcal{M}$.

Exemplarisch betrachten wir hier die (Presburger-)Arithmetik.

1.2 Definition

Die Signatur der **Arithmetik ohne Multiplikation** (mit Kleiner-Gleich) ist

$$S_{PA} = \left(\left\{0_{/0}, 1_{/0}, +_{/2}\right\}, \left\{\leq_{/2}\right\}\right).$$

Mit ihr lassen sich Gleichungen und Ungleichungen von Summen ausdrücken, in denen Variablen und die Konstanten 0 und 1 vorkommen.

Beachte, dass sich jede natürliche Zahl n entweder als 0 oder als $\underbrace{1 + \ldots + 1}_{n \text{ Mal}}$ schreiben lässt.

1.3 Definition

Presburger-Arithmetik ist die S_{PA}-Struktur $\mathcal{M}_{PA} = (\mathbb{N}, \mathcal{I})$, wobei $\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen ist, und $\mathcal{I}$ die Symbole wie erwartet interpretiert:

- $0^{\mathcal{M}_{PA}} = 0 \in \mathbb{N}$,
- $1^{\mathcal{M}_{PA}} = 1 \in \mathbb{N}$,
- für $e, d \in \mathbb{N}$ ist $e +^{\mathcal{M}_{PA}} d = e + d \in \mathbb{N}$,
- für $e, d \in \mathbb{N}$ ist $(e \leq^{\mathcal{M}_{PA}} d) = 1$ gdw. $e \leq d$ in $\mathbb{N}$.

Sei nun $\mathcal{T}_{\mathcal{M}_{PA}}$ wie oben definiert die Menge aller abgeschlossenen Formeln über S_{PA}, die in Presburger-Arithmetik wahr sind.

Wir definieren nun die Menge von Formeln

$$\Sigma = \mathcal{T}_{\mathcal{M}_{PA}} \cup \left\{ \underbrace{1 + \ldots + 1}_{n} \leq x \;\middle|\; n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \right\}.$$

Statt $\underbrace{1 + \ldots + 1}_{n} \leq x$ schreiben wir auch $n \leq x$, d.h.

$$\Sigma = \mathcal{T}_{\mathcal{M}_{PA}} \cup \left\{ n \leq x \;\middle|\; n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \right\}.$$

Beachte, dass die Variable x in den Formeln nicht quantifiziert ist, wir haben also nun nicht-abgeschlossene Formeln zu $\mathcal{T}_{\mathcal{M}_{PA}}$ hinzugefügt. Um eine Formel $n \leq x$ zu erfüllen, müssen wir eine Belegung σ definieren mit $\sigma(x) \geq n$, z.B. $\sigma(x) = n$.

Im Folgenden wollen wir zeigen:

1. Σ ist erfüllbar; Es gibt eine Struktur $\mathcal{N}$ und eine Belegung σ, so dass $\mathcal{N}, \sigma \models \Sigma$.
2. So ein $\mathcal{N}$ verhält sich auf den abgeschlossenen Formeln genau wie Presburger-Arithmetik.

3. $\mathcal{N}$ verhält sich auf den nicht-abgeschlossenen Formeln anders als Presburger-Arithmetik.

Dabei werden wir

1. mit Hilfe des Kompaktheitssatzes beweisen,
2. ist leicht zu sehen, da $\mathcal{T}_{\mathcal{M}_{PA}} \subseteq \Sigma$,
3. diskutieren wir später im Detail.

1.4 Satz

Σ ist erfüllbar.

Beweis:
Sei $\Sigma^{fin} \subseteq \Sigma$ eine beliebige endliche Teilmenge. Wir können eine Zerlegung finden,

$$\Sigma^{fin} = \Sigma' \,\dot\cup\, \Sigma''$$

so dass Σ' die abgeschlossenen Formeln aus $\mathcal{T}_{\mathcal{M}_{PA}}$ enthält, und Σ'' die nicht-abgeschlossenen Formeln, die hinzugefügt wurden, d.h.

$$\Sigma' \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{M}_{PA}}, \qquad \Sigma'' \subseteq \left\{ \underbrace{1 + \ldots + 1}_{n} \leq x \;\middle|\; n \geq 1 \right\}.$$

Die Formeln in Σ'' sind alle von der Form $n \leq x$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Da Σ^{fin} endlich war, ist Σ'' auch endlich, das heißt wir können die vorkommenden n explizit auflisten:

$$\Sigma'' = \left\{ n_1 \leq x, \ldots, n_k \leq x \right\}.$$

Wir wollen nun zeigen, dass die Presburger-Arithmetik $\mathcal{M}_{PA}$ zusammen mit einer geeigneten Belegung σ die Formelmenge Σ^{fin} erfüllt.

Definiere dazu die Belegung σ mit

$$\sigma(x) = \max_{j=1,\ldots,k} n_i\,,$$

d.h. wir belegen x mit der größten Zahl n, so dass $n \leq x$ in Σ'' vorkommt.

Behauptung: $\mathcal{M}_{PA}, \sigma \models \Sigma^{fin}$.

Beweis der Behauptung:
Es gilt $\mathcal{M}_{PA} \models \mathcal{T}_{\mathcal{M}_{PA}}$ gemäß der Definition von $\mathcal{T}_{\mathcal{M}_{PA}}$. Da $\Sigma' \subset \mathcal{T}_{\mathcal{M}_{PA}}$ eine Teilmenge ist, gilt auch $\mathcal{M}_{PA} \models \Sigma'$. Da alle Formeln in Σ' abgeschlossen sind und daher eine Belegung ihren Wahrheitswert nicht beeinflusst, gilt auch $\mathcal{M}_{PA}, \sigma \models \Sigma'$.

Betrachte nun eine beliebige Formel $n_i \leq x$ aus Σ''. Nach der Definition von $\sigma(x)$ gilt $\sigma(x) \geq n$ für alle n, die in Σ'' vorkommen, insbesondere ist also $n_i \leq \sigma(x)$ wahr. Da $n_i \leq x$ beliebig gewählt wahr, gilt nun $\mathcal{M}_{PA}, \sigma \models \Sigma''$.

Da $\Sigma^{fin} = \Sigma' \cup \Sigma''$, und $\mathcal{M}_{PA}$ und σ beide Teile der Zerlegung erfüllen, gilt auch $\mathcal{M}_{PA}, \sigma \models \Sigma^{fin}$. Dies beendet den Beweis der Behauptung.

Wir haben nun gezeigt, dass jede beliebig gewählte endliche Teilmenge $\Sigma^{fin} \subseteq \Sigma$ erfüllbar ist. Mit dem Kompaktheitssatz er Prädikatenlogik ist damit auch Σ selbst erfüllbar. □

Da Σ erfüllbar ist, gibt es eine Struktur $\mathcal{N}$ und eine Belegung σ, so dass $\mathcal{N}, \sigma \models \Sigma$. Für jede endliche Teilmenge konnten wir als erfüllende Struktur die Presburger-Arithmetik $\mathcal{M}_{PA}$ verwenden. Man könnte nun erwarten, dass auch ganz Σ selbst von $\mathcal{M}_{PA}$ mit einer geeigneten Belegung erfüllt werden kann Der folgende Satz zeigt, dass dies nicht der Fall ist.

1.5 Satz
Es gibt keine Belegung σ, so dass die Presburger-Arithmetik zusammen mit σ die Formelmenge Σ erfüllt.

Beweis:
Angenommen es gäbe σ, so dass $\mathcal{M}_{PA}, \sigma \models \Sigma$.

Sei $n' \in \mathbb{N}$ die natürliche Zahl, mit der σ die Variable x belegt, also $\sigma(x) = n'$. Wir betrachten die Formel $n' + 1 \leq x$ aus Σ. (Formal: $\underbrace{1 + \ldots + 1}_{(n'+1)\text{ Mal}} \leq x$).)

Da $\mathcal{M}_{PA}$ zusammen mit σ ganz Σ erfüllt, erfüllen sie insbesondere auch diese Formel. Es gilt aber

$$\mathcal{M}_{PA}[\![n' + 1 \leq x]\!](\sigma) = \left(n' + 1 \leq^{\mathcal{M}_{PA}} \sigma(x)\right) = \left(n' + 1 \leq^{\mathcal{M}_{PA}} n'\right) = 0\,.$$

Dies ist ein Widerspruch zur Annahme. □

Wir sehen also, dass sich $\mathcal{M}_{PA}$ anders verhält als jedes erfüllende Struktur $\mathcal{N}$ für Σ. Wir werden dies später weiter präzisieren.

Zunächst aber sehen wir, dass sich $\mathcal{N}$ auf den abgeschlossenen Formeln genau wie $\mathcal{M}_{PA}$ verhält.

1.6 Definition
Zwei Strukturen $\mathcal{N} = (D, \mathcal{I})$ und $\mathcal{N}' = (D', \mathcal{I}')$ über der selben Signatur S heißen **elementar äquivalent**, wenn sie die gleichen geschlossenen Formeln erfüllen, also wenn für jede abgeschlossene Formel $A \in FO(S)$ gilt:

$$\mathcal{N} \models A \text{ genau dann, wenn } \mathcal{N}' \models A.$$

Elementare Äquivalenz lässt sich auch mittels der Theorien ausdrücken.

1.7 Lemma

Zwei S-Strukturen $\mathcal{N}$ und $\mathcal{N}'$ sind elementar äquivalent, gdw. $\mathcal{T}_{\mathcal{N}} = \mathcal{T}_{\mathcal{N}'}$.

Beweis:
Folgt direkt aus den Definitionen. $\square$

1.8 Satz

Sei $\mathcal{M}_{PA}$ wieder die Presburger-Arithmetik und sei $\mathcal{N}$ eine S_{PA}-Struktur, so dass es eine Belegung gibt mit $\mathcal{N}, \sigma \models \Sigma$.

$\mathcal{M}_{PA}$ und $\mathcal{N}$ sind elementar äquivalent.

Beweis:
Wir zeigen $\mathcal{T}_{\mathcal{M}_{PA}} = \mathcal{T}_{\mathcal{N}}$, in dem wir beide Inklusionen beweisen.

Eine Inklusion, $\mathcal{T}_{\mathcal{M}_{PA}} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{N}}$, ist klar:
Es gibt eine Belegung σ, so dass $\mathcal{N}$ mit σ die Formelmenge Σ erfüllt. $\mathcal{T}_{\mathcal{M}_{PA}}$ ist eine Teilmenge von Σ, und enthält nur abgeschlossene Formeln, also gilt $\mathcal{N} \models \mathcal{T}_{\mathcal{M}_{PA}}$. Gemäß der Definition von $\mathcal{T}_{\mathcal{N}}$ gilt dann aber $\mathcal{T}_{\mathcal{M}_{PA}} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{N}}$.

Für die andere Inklusion, $\mathcal{T}_{\mathcal{M}_{PA}} \supseteq \mathcal{T}_{\mathcal{N}}$, führen wir einen Widerspruchsbeweis, in dem wir die Vollständigkeit von $\mathcal{T}_{\mathcal{M}_{PA}}$ ausnutzen.
Angenommen die Inklusion würde nicht gelten, d.h. es gäbe eine abgeschlossene Formel A mit $A \in \mathcal{T}_{\mathcal{N}}$, aber $A \notin \mathcal{T}_{\mathcal{M}_{PA}}$. Da A abgeschlossen ist, ist der Wahrheitswert $\mathcal{M}_{PA}[\![A]\!]$ von der Belegung unabhängig. $\mathcal{M}_{PA}[\![A]\!] = 1$ kann nicht gelten, da sonst $A \in \mathcal{T}_{\mathcal{M}_{PA}}$ gelten würde. Also gilt $\mathcal{M}_{PA}[\![A]\!] = 0$, damit macht $\mathcal{M}_{PA}$ aber dann die Negation von A wahr, $\mathcal{M}_{PA}[\![\neg A]\!] = 1$. Es gilt also gemäß der Definition von $\mathcal{T}_{\mathcal{M}_{PA}}$, dass $\neg A \in \mathcal{T}_{\mathcal{M}_{PA}}$.

Die Inklusion $\mathcal{T}_{\mathcal{M}_{PA}} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{N}}$ hatten wir bereits gezeigt, es gilt also $\neg A \in \mathcal{T}_{\mathcal{N}}$. Gemäß der Definition von $\mathcal{T}_{\mathcal{N}}$ gilt nun $\mathcal{N}[\![\neg A]\!] = 1$.

Wir hatten aber auch angenommen, dass $A \in \mathcal{T}_{\mathcal{N}}$, und damit $\mathcal{N}[\![A]\!] = 1$. Wir erhalten einen Widerspruch: $\mathcal{N}[\![\neg A]\!] = 1$ und $\mathcal{N}[\![A]\!] = 1$ können nicht gleichzeitig gelten. $\square$

Zum Abschluss wollen wir noch den Fakt, dass $\mathcal{N}$ und $\mathcal{M}$ sich unterscheiden, formalisieren.

1.9 Definition

Zwei S-Strukturen $\mathcal{N} = (D, \mathcal{I})$ und $\mathcal{N}' = (D', \mathcal{I}')$ heißen **isomorph**, wenn es eine bijektive Abbildung $\varphi : D \to D'$ gibt mit

$$\begin{aligned} p^{\mathcal{N}}(d_1, \ldots, d_k) &= p^{\mathcal{N}'}(\varphi(d_1), \ldots, \varphi(d_k)) && \text{für alle } d_1, \ldots, d_k \in D \text{, und} \\ \varphi(f^{\mathcal{N}}(d_1, \ldots, d_\ell)) &= f^{\mathcal{N}'}(\varphi(d_1), \ldots, \varphi(d_\ell)) && \text{für alle } d_1, \ldots, d_\ell \in D \ . \end{aligned}$$

für jedes k-stellige Prädikatssymbol p und jedes ℓ-stellige Funktionssymbol f.

Bijektiv bedeutet, dass jedem Element von D genau ein Element von D' zugeordnet wird und umgekehrt.

1.10 Satz

Sei $\mathcal{M}_{PA}$ wieder die Presburger-Arithmetik und sei $\mathcal{N}$ eine S_{PA}-Struktur, so dass es eine Belegung gibt mit $\mathcal{N}, \sigma \models \Sigma$.

$\mathcal{M}_{PA}$ und $\mathcal{N}$ sind nicht isomorph.

Beweis:
Wähle eine Struktur $\mathcal{N} = (D_{\mathcal{N}}, \mathcal{I}_{\mathcal{N}})$ und die Belegung σ mit $\mathcal{N}, \sigma \models \Sigma$. Beachte, dass $\mathcal{N}$ wie oben gezeigt zur Presburger-Arithmetik $\mathcal{M}_{PA}$ elementar äquivalent ist.

Angenommen $\mathcal{N}$ und $\mathcal{M}_{PA}$ wären isomorph. Dann gäbe es einen Isomorphismus, also eine bijektive Abbildung

$$\varphi : D_{\mathcal{N}} \to \mathbb{N}$$

welche die Auswertung von Prädikaten und Funktionen respektiert.

Dieser Isomorphismus weist insbesondere $\sigma(x)$ einen Wert zu, wir wählen

$$m = \varphi(\sigma(x)) .$$

Da $\mathcal{N}, \sigma \models \Sigma$ wird der folgende Ausdruck zu wahr ausgewertet:

$$\underbrace{1^{\mathcal{N}} +^{\mathcal{N}} \ldots +^{\mathcal{N}} 1^{\mathcal{N}}}_{n} \leq^{\mathcal{N}} \sigma(x) \text{ für alle } n \in \mathbb{N} .$$

(Hierbei sei $1^{\mathcal{N}}$ der Wert im Datenbereich von $\mathcal{N}$, zu dem das Funktionssymbol 1 ausgewertet wird, und $+^{\mathcal{N}}, \leq^{\mathcal{N}}$ die Interpretationen von $+, \leq$ in $\mathcal{N}$.)

Da der Isomorphismus mit dem Auswerten von Prädikaten und Funktionen kompatibel ist, wird auch der folgende Ausdruck zu wahr ausgewertet:

$$\underbrace{\varphi(1^{\mathcal{N}}) +^{\mathcal{M}_{PA}} \ldots +^{\mathcal{M}_{PA}} \varphi(1^{\mathcal{N}})}_{n} \leq^{\mathcal{M}_{PA}} = \varphi(\sigma(x)) \text{ für alle } n \in \mathbb{N} .$$

Angenommen $\varphi(1^{\mathcal{N}}) \neq 0 \in \mathbb{N}$, also $\varphi(1^{\mathcal{N}}) \geq 1$. Dann erhalten wir insbesondere

$$m + 1 \leq^{\mathcal{M}_{PA}} \underbrace{\varphi(1^{\mathcal{N}}) +^{\mathcal{M}_{PA}} \ldots +^{\mathcal{M}_{PA}} \varphi(1^{\mathcal{N}})}_{m+1 \text{ Mal}} .$$

Gleichzeitig gilt aber für die Wahl $n = m + 1$

$$\underbrace{\varphi(1^{\mathcal{N}}) +^{\mathcal{M}_{PA}} \ldots +^{\mathcal{M}_{PA}} \varphi(1^{\mathcal{N}})}_{n \text{ Mal}} \leq^{\mathcal{M}_{PA}} m.$$

Daraus folgt $m + 1 \leq m$ in Presburger-Arithmetik und wir haben einen Widerspruch hergeleitet.

Es muss also $\varphi(1^{\mathcal{N}}) = 0$ gelten.
Angenommen $\varphi(0^{\mathcal{N}}) = 0$, dann folgt wegen der Bijektivität von φ die Gleichheit $0^{\mathcal{N}} = 1^{\mathcal{N}}$. Dies ist ein Widerspruch, da dann die abgeschlossene Formel $0 = 1$ in der Struktur $\mathcal{N}$ wahr ist, jedoch in Presburger-Arithmetik nicht.

Also muss

$$\varphi(0^{\mathcal{N}}) = k \text{ für ein } k \in \mathbb{N}, k \neq 0$$

gelten.

Die geschlossene Formel $\neg(1 \leq 0)$ ist in Presburger-Arithmetik wahr, sie muss also auch in $\mathcal{N}$ wahr sein, da $\mathcal{M}_{PA}$ und $\mathcal{N}$ elementar äquivalent sind. Dementsprechend ist die Formel $1 \leq 0$ in $\mathcal{N}$ nicht erfüllt. Aufgrund der der Definition von Isomorphismus gilt aber, dass die Wahrheitswerte

$$\left(1^{\mathcal{N}} \leq^{\mathcal{N}} 0^{\mathcal{N}}\right) = \left(\varphi(1^{\mathcal{N}}) \leq^{\mathcal{M}_{PA}} \varphi(0^{\mathcal{N}})\right) = \left(0 \leq^{\mathcal{N}} k\right)$$

übereinstimmen und damit auch $0 \leq k$ in Presburger-Arithmetik nicht erfüllt ist. Dies ist ein Widerspruch, denn $0 \leq k$ gilt für $k > 0$ gilt natürlich. $\square$