

Variablen-Umbenennungen

Ziel: Beschreibung der Wahlfreiheit für allgemeinste Unifikatoren

Gezeigt: Ein allgemeinsten Unifikator kann gefunden werden.

Frage: Wie sehen die anderen aus?

Definition 1. Eine Variablen-Umbenennung ist eine Substitution der Form $\Theta = \{x_1/y_1, \dots, x_n/y_n\}$, wobei y_1, \dots, y_n Variablen sind.

Satz 1 (Eindeutigkeit des allgemeinsten Unifikators). Für jede Literalmenge gibt es bis auf Variablen-Umbenennungen nur einen allgemeinsten Unifikator. Das heißt: Sind Θ_1 und Θ_2 allgemeinste Unifikatoren einer Literalmenge M , dann gibt es eine Variablen-Umbenennung $\tilde{\Theta}$ mit $\Theta_2 = \Theta_1 \tilde{\Theta}$.

Beweis. Es seien Θ_1 und Θ_2 allgemeinste Unifikatoren der Literalmenge M .

- Nach der Definition allgemeinsten Unifikatoren gibt es dann Substitutionen $\tilde{\Theta}_1$ und $\tilde{\Theta}_2$ mit $\Theta_1 = \Theta_2 \tilde{\Theta}_2$ und $\Theta_2 = \Theta_1 \tilde{\Theta}_1$. Damit gilt also auch

$$\Theta_1 = \Theta_2 \tilde{\Theta}_2 = \Theta_1 \tilde{\Theta}_1 \tilde{\Theta}_2 \quad (*)$$

- Es sei $V_1 = \bigcup_{x \text{ Variable}} V(x\Theta_1)$, also die Menge der Variablen, die im Bild von Θ_1 vorkommen. Gleichung (*) impliziert, dass $x\tilde{\Theta}_1\tilde{\Theta}_2 = x$ für jedes $x \in V_1$. Insbesondere ist $x\tilde{\Theta}_1$ eine Variable für jedes $x \in V_1$.
- Wir definieren:

$$x\tilde{\Theta} = \begin{cases} x\tilde{\Theta}_1 & \text{falls } x \in V_1 \\ x & \text{sonst} \end{cases}$$

Man beachte, dass dann $\tilde{\Theta}$ eine Variablen-Umbenennung ist. Außerdem stimmt $\Theta_1 \tilde{\Theta}$ mit $\tilde{\Theta}_1$ auf allen Variablen in V_1 überein. Deshalb gilt:

$$\Theta_1 \tilde{\Theta} = \Theta_1 \tilde{\Theta}_1 = \Theta_2.$$

□

Prädikatenlogische Resolution

Ziel Verallgemeinerung aussagenlogischer Resolution auf Prädikatenlogik.

Naiver Ansatz Aussagenlogische Resolution für Herbrand-Expansion durchführen.

Nachteil dabei Erfordert Raten der richtigen Grundsubstitution am Anfang.

Prädikatenlogische Resolution arbeitet daher direkt mit Klauseln, die noch Variablen enthalten.

Definition 2 (Prädikatenlogische Resolvente). *Es seien K_1, K_2 prädikatenlogische Klauseln und Θ_1, Θ_2 Variablen-Umbenennungen, so dass $K_1\Theta_1$ und $K_2\Theta_2$ disjunkte Variablenmengen haben.*

Falls es Literale $L_1, \dots, L_m \in K_1\Theta_1$ und $L'_1, \dots, L'_n \in K_2\Theta_2$ gibt, so dass

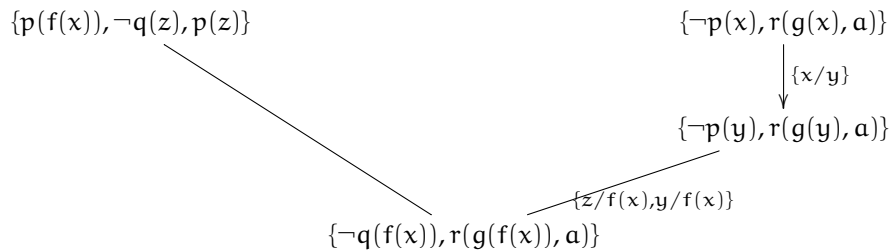
$$\{\overline{L_1}, \dots, \overline{L_m}, L'_1, \dots, L'_n\}$$

unifizierbar ist mit allgemeinstem Unifikator Θ , dann heißt

$$R := ((K_1\Theta_1 \setminus \{L_1, \dots, L_m\}) \cup (K_2\Theta_2 \setminus \{L'_1, \dots, L'_n\}))\Theta$$

prädikatenlogische Resolvente von K_1 und K_2 .

Beispiel:



In diesem Fall ist

$$K_1 = \{p(f(x)), \neg q(z), p(z)\},$$

$$K_2 = \{\neg p(x), r(g(x), a)\},$$

$$\Theta_1 = \{\},$$

$$\Theta_2 = \{x/y\},$$

$$\Theta = \{z/f(x), y/f(x)\},$$

$$R = \{\neg q(f(x)), r(g(f(x)), a)\}.$$

Definition 3 (Herleitung). *Es seien Σ eine Menge von Klauseln und K eine Klausel. Eine Folge K_1, \dots, K_n von Klauseln mit $K_n \equiv K$ ist eine Herleitung von K aus Σ , in Zeichen $\Sigma \vdash_{Res} K$, falls für $1 \leq k \leq n$:*

(i) $K_k \in \Sigma$ oder

(ii) es gibt $i, j < k$, so dass K_k prädikatenlogische Resolvente von K_i und K_j ist.

Satz 2 (Korrektheit und Widerlegungsvollständigkeit, Robinson). *Es sei $A \equiv \forall x_1 \dots \forall x_n B$ geschlossen und in Skolemform, wobei B in KNF ist. Dann ist A unerfüllbar genau dann, wenn $B \vdash_{Res} \perp$.*

Bemerkungen zum Satz:

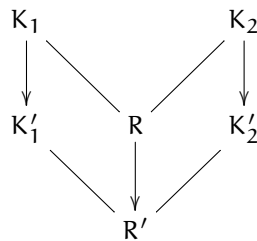
Korrektheit Ähnlich zum aussagenlogischen Fall

Widerlegungsvollständigkeit Zu einer Herleitung K'_1, \dots, K'_n aus Klauseln von Formeln in $E(A)$ mittels aussagenlogischer Resolution konstruiere Herleitung K_1, \dots, K_n mittels prädikatenlogischer Resolution, so dass K'_i eine Grundinstanz von K_i ist für $1 \leq i \leq n$. Beweis in der Übung.

Die Konstruktion verwendet folgendes Lemma:

Lemma 1 (Lifting-Lemma). *Es seien K_1, K_2 prädikatenlogische Klauseln und K'_1, K'_2 Grundinstanzen von K_1, K_2 mit aussagenlogischer Resolvente R' . Dann gibt es eine prädikatenlogische Resolvente R von K_1, K_2 , so dass R' Grundinstanz von R ist.*

Als Bild:



Hier steht wieder ein Pfeil für eine Substitution und gerade Linien ohne Pfeilspitze für einen Resolutionsschritt.

Beweis. • Wir führen den Beweis für den Fall, dass K_1 und K_2 variablen-disjunkt sind. Der allgemeine Fall wird in der Übung besprochen.

- Da K'_i Grundinstanz von K_i ist, gibt es eine Substitution Θ_i mit $K'_i = K_i \Theta_i$ für $i = 1, 2$.
- Da K_1 und K_2 variablen-disjunkt sind, können wir die Substitution $\Theta = \Theta_1 \cup \Theta_2$ bilden, die sich auf den Variablen von K_1 so verhält wie Θ_1 und auf denen von K_2 so verhält wie Θ_2 .
- R' ist Resolvente von K'_1 und K'_2 , also gibt es ein Literal L mit $\bar{L} \in K'_1$ und $L \in K'_2$ und $R' = K'_1 \setminus \{\bar{L}\} \cup K'_2 \setminus \{L\}$
- Es seien L_1, \dots, L_m und L'_1, \dots, L'_n die Literale, für die

$$\begin{aligned} \{L_1, \dots, L_m\} &= \{M \in K_1 \mid M \Theta_1 = \bar{L}\}, \\ \{L'_1, \dots, L'_n\} &= \{M \in K_2 \mid M \Theta_2 = L\}. \end{aligned}$$

- Dann gilt

$$\begin{aligned} \bar{L}_i \Theta &= \bar{L}_i \Theta_1 = L && \text{für } 1 \leq i \leq m, \\ L'_i \Theta &= L'_i \Theta_2 = L && \text{für } 1 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

Also ist Θ Unifikator von

$$\{\bar{L}_1, \dots, \bar{L}_m, L'_1, \dots, L'_n\}.$$

Es sei Θ' ein allgemeinsten Unifikator dieser Menge. Dann gibt es eine Substitution $\tilde{\Theta}$ mit $\Theta = \Theta' \tilde{\Theta}$.

- Definiere

$$R = ((K_1 \setminus \{L_1, \dots, L_m\}) \cup (K_2 \setminus \{L'_1, \dots, L'_n\})) \Theta'.$$

Dann ist R Resolvente von K_1 und K_2 . Außerdem gilt:

$$\begin{aligned} R \tilde{\Theta} &= ((K_1 \setminus \{L_1, \dots, L_m\}) \cup (K_2 \setminus \{L'_1, \dots, L'_n\})) \Theta' \tilde{\Theta} \\ &= ((K_1 \setminus \{L_1, \dots, L_m\}) \cup (K_2 \setminus \{L'_1, \dots, L'_n\})) \Theta \\ &= K'_1 \setminus \{\bar{L}\} \cup K'_2 \setminus \{L\} \\ &= R'. \end{aligned}$$

- Damit ist R' Grundinstanz von R.

□