Einführung in die Logik

Klaus Madlener und Roland Meyer

24. April 2013

Inhaltsverzeichnis

1 Aussagenlogik **1**

1.1 Syntax 1

1.2 Semantik 3

1.3 Kompaktheit 6

1 Aussagenlogik

1.1 Syntax

Das vorliegende Kapitel dient als Einführung in die Aussagenlogik. Im Mittelpunkt steht die Frage nach der Bedeutung einer Aussage: wann ist eine Aussage wahr und wann ist sie falsch? Darüber hinaus beschäftigt sich die Aussagenlogik mit dem Zusammensetzen mehrerer Aussagen zu neuen, komplexeren Aussagen sowie den Zusammenhängen von Aussagen untereinander. Um die Bedeutung einer Aussage zu bestimmen, müssen zunächst die Begriffe *wahr* und *falsch* geklärt werden. Dazu ist eine Formalisierung des Wahrheitsbegriffes nötig.

1.1 Definition (Syntax der Aussagenlogik)**.** Sei $\Sigma = V \cup O \cup K$ ein *Alphabet*, wobei $V = \{p_1, p_2, \ldots\}$ eine abzählbare Menge von *Aussagevariablen* ist, $O = \{\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ eine Menge von *Verknüpfungen (Junktoren)* bezeichnet und $K = \{(,)\}$ die Klammern beinhaltet. Die Menge der *Aussageformen* $F \subseteq \Sigma^\star$ (auch *Formeln* der Aussagenlogik genannt) wird induktiv definiert durch

1. $V \subseteq F$, die Menge der atomaren Aussagen,
2. falls $A, B \in F$, dann $(\neg A), (A \wedge B), (A \vee B), (A \rightarrow B), (A \leftrightarrow B) \in F$ und
3. F ist die kleinste Menge von Elementen aus Σ^*, die V enthält und 2. erfüllt.

Eigenschaften von F werden mit Hilfe *struktureller Induktion*, Induktion über den Aufbau von F, bewiesen. Ein Beispiel für eine Eigenschaften von F ist Folgende: Wenn man eine Formel von links nach rechts liest, ist die Anzahl an öffnenden Klammern größer als die Zahl der schließenden Klammern. Um diese Behauptung formal zu fassen, definieren wir die Hilfsfunktion $f : F \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Für eine Formel $A \in F$ und eine natürliche Zahl $1 \leq i \leq |A|$ liefert

$$\begin{aligned} f(A, i) := {} & \text{Anzahl an öffnenden Klammern (minus Anzahl der schließenden} \\ & \text{Klammern) in den ersten } i \text{ Buchstaben von } A. \end{aligned}$$

1.2 Lemma. Für jede Formel $A \in F$ und für alle $1 \leq i < |A|$ gilt $f(A, i) > 0$. Ferner gilt $f(A, |A|) = 0$.

Beweis. Für den Basisfall atomarer Formeln $p \in V$ gilt $f(p, |p|) = 0$. Der Fall $i < |p|$ tritt nicht ein.

Angenommen die Aussage gelte für A_1 und A_2 und betrachte zunächst $(\neg A_1)$. Sofern $i \leq 2$, folgt die Aussage unmittelbar. Für den Fall $2 < i < |(\neg A_1)|$ gilt

$$f(\ (\neg A_1), i\ ) = 1 + f(\ A_1, i - 2\ ) > 0,$$

wobei für $f(\ A_1, i-2\ )$ die Induktionsvoraussetzung greift und $f(\ A_1, i-2\ ) > 0$ oder $f(\ A_1, i - 2\ ) = 0$ liefert. Für $i = |(\neg A_1)|$ folgt

$$f(\ (\neg A_1), |(\neg A_1)|\ ) = 1 + f(\ A_1, |A_1|\ ) - 1 = 0.$$

Auch hier wird die Induktionsvoraussetzung mit $f(\ A_1, |A_1|\ ) = 0$ genutzt.

Für den Fall $(A_1 \star A_2)$ beschränken wir uns auf $|(A_1 \star| < i < |(A_1 \star A_2)|$ und erhalten:

$$\begin{aligned} f(\ (A_1 \star A_2), i\ ) &= 1 + f(\ A_1, |A_1|\ ) + f(\ A_2, i - |(A_1 \star|\ ) \\ &= 1 + f(\ A_2, i - |(A_1 \star|\ ) > 0. \end{aligned}$$

Die zweite Gleichung gilt mit $f(\ A_1, |A_1|\ ) = 0$ nach Induktionsvoraussetzung. Die Ungleichung folgt mit $f(\ A_2, i - |(A_1 \star|\ ) > 0$ oder $f(\ A_2, i - |(A_1 \star|\ ) = 0$, ebenfalls nach Induktionsvoraussetzung. Die übrigen Fälle sind analog. ■

Eine wichtige Konsequenz des Lemmas ist, dass ein echtes Präfix einer Formel selber keine Formel sein kann. Dabei heißt $B \in \Sigma^*$ echtes Präfix von $A \in \Sigma^*$, falls die ersten $|B| \in \mathbb{N}$ Buchstaben von A und B übereinstimmen und B echt kürzer als A ist, $|B| < |A|$.

1.3 Korollar. Sei $A \in F$ und $B \in \Sigma^*$ ein echtes Präfix von A. Dann gilt $B \notin F$.

Beweis. Sei $B \in \Sigma^*$ ein echtes Präfix von $A \in F$. Mit Lemma 1.2 folgt, dass

$$0 < f(\ A, |B|\ ) = f(\ B, |B|\ ).$$

Wäre B in F, so müsste aber $f(B, |B|) = 0$ gelten. Damit gilt also $B \notin F$. ■

Mit Korollar 1.3 werden wir im Folgenden zeigen, dass jede Formel genau einen Syntaxbaum hat. Man beachte, dass dies nur aus der konsequenten Verwendung von Klammern folgt. Für ein Wort $p_1 \wedge p_2 \vee p_3$ über Σ ist der oberste Operator nicht eindeutig: es kann sowohl $\wedge$ als auch $\vee$ sein. Der folgende Satz formalisiert die Eindeutigkeit des Ableitungsbaums. Dabei wird die syntaktische Gleichheit von Worten über Σ mit $\equiv\ \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ bezeichnet. Also $A \equiv B$ mit $A, B \in \Sigma^*$, falls die Buchstaben von A mit den Buchstaben von B übereinstimmen.

1.4 Satz (Eindeutigkeitssatz)**.** Jede Formel $A \in F$ ist entweder atomar, $A \in V$, es gilt $A \equiv (\neg A_1)$ mit einer eindeutigen Formel $A_1 \in F$ oder $A \equiv (A_1 \star A_2)$ mit eindeutigen $\star \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, $A_1, A_2 \in F$.

Beweis. Der Beweis ist eine Fallunterscheidung über die möglichen Formeln. Ist A atomar, dann gilt $A \in V$ wie gefordert. Betrachte zusammengesetzte Formeln.

Fall $(\neg A)$ mit $A \in F$.

1. Angenommen es gäbe eine weitere Darstellung $(\neg B)$ mit $B \in F$, so dass $(\neg A) \equiv (\neg B)$. Per Definition von $\equiv$ muss dann $A \equiv B$ gelten. Die Formeln A und B sind also syntaktisch gleich und die geforderte Eindeutigkeit gilt.

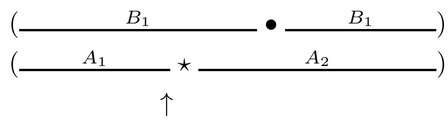
2. Angenommen es gäbe eine Darstellung $(A_1 \star A_2)$ mit $A_1, A_2 \in F$ und $\star \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, so dass $(\neg A) \equiv (A_1 \star A_2)$. Dann stimmt der zweite Buchstabe $\neg$ von $(\neg A)$ mit dem ersten Buchstaben von A_1 überein. Das widerspricht aber der Definition von Formeln, nach der A_1 entweder eine Aussagevariable ist oder eine Formel, die mit einer öffnenden Klammer beginnt. Der Fall tritt daher nicht auf und die Darstellung von $(\neg A)$ ist eindeutig.

Fall $(A_1 \star A_2)$ mit $A_1, A_2 \in F$ und $\star \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$.

3. Eine andere Darstellung der Form $(\neg B)$ mit $B \in F$ führt analog zu Fall 2. zu einem Widerspruch.

4. Angenommen es gilt $(A_1 \star A_2) \equiv (B_1 \bullet B_2)$ mit Formeln $B_1, B_2 \in F$ und $\bullet \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$. Falls $|A_1| = |B_1|$, dann folgt per Definition von $\equiv$, dass $\star = \bullet$, $A_1 \equiv B_1$ und $A_2 \equiv B_2$. Damit ist die Forderung nach einer eindeutigen Darstellung erfüllt.

   Für den Fall $|A_1| \neq |B_1|$ sei oBdA. $|B_1| > |A_1|$, so dass folgende Situation vorliegt:

   Per Definition von $\equiv$ ist A_1 ein echtes Präfix von B_1. Mit Korollar 1.3 kann A_1 damit aber keine Formel sein, $A_1 \notin F$. Ein Widerspruch zur Annahme dass A_1 eine Formel ist. Der Fall tritt nicht auf.

■

Die Sprache $F \subseteq \Sigma^*$ der aussagenlogischen Formeln kann durch eine kontextfreie Grammatik erzeugt werden. Mit Satz 1.4 ist diese Grammatik sogar *eindeutig*, d.h. jede Formel in F hat genau einen Ableitungsbaum. Eine Konsequenz der Darstellung von F über eine kontextfreie Grammatik ist, dass das *Wortproblem für F entscheidbar ist.*[1] Es gibt einen (sogar Polynomialzeit-)Algorithmus, der für ein gegebes Wort $A \in \Sigma^*$ entscheidet, ob A eine Formel ist oder nicht: $A \in F$ oder $A \notin F$. Diesen Test führt ein Compiler bei jedem Conditional (IF und WHILE) eines zu übersetzenden Programms durch.

1.2 Semantik

Die Wahrheitswert aussagenlogischer Formeln wird über Bewertungen definiert, Abbildungen der Formelmenge F in den Booleschen Bereich $\mathbb{B} := \{0, 1\}$.

1.5 Definition. Eine *Bewertung* ist eine Funktion $\varphi : F \rightarrow \mathbb{B}$, die folgende Einschränkungen erfüllt:

$$\begin{aligned}
\varphi(\neg A) &= 1 - \varphi(A) \\
\varphi(A \vee B) &= \max\{\varphi(A), \varphi(B)\} \\
\varphi(A \wedge B) &= \min\{\varphi(A), \varphi(B)\} \\
\varphi(A \rightarrow B) &= \begin{cases} 0, & \text{falls } \varphi(A) = 1 \text{ und } \varphi(B) = 0, \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases} \\
\varphi(A \leftrightarrow B) &= \begin{cases} 0, & \text{falls } \varphi(A) \neq \varphi(B), \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}
\end{aligned}$$

[1] Man sagt auch, F ist *entscheidbar*, wenn man sich auf das Wortproblem der Menge bezieht.

Man sagt, Formel $A \in F$ sei *falsch unter* φ, falls $\varphi(A) = 0$. Analog heißt A *wahr unter* φ, falls $\varphi(A) = 1$. Eine mögliche Darstellung für Bewertungen sind *Wahrheitstafeln*:

$\varphi(A)$	$\varphi(\neg A)$
0	1
1	0

$\varphi(A)$	$\varphi(B)$	$\varphi(A \vee B)$	$\varphi(A \wedge B)$	$\varphi(A \to B)$
0	0	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	1	0	0
1	1	1	1	1

Eine *Belegung* der aussagenlogischen Variablen V ist eine Funktion $\psi : V \to \mathbb{B}$. Jede Bewertung φ von F lässt sich auf eine Belegung ψ der Variablen $V \subseteq F$ einschränken: $\psi := \varphi|_V$. Umgekehrt induziert jede Belegung von V eine sogar eindeutige Bewertung der Formeln in F. Zusammen ergibt sich, dass jede Bewertung $\varphi : F \to \mathbb{B}$ eindeutig durch die Werte von φ auf V festgelegt ist. Um also $\varphi(A)$ zu berechnen, genügt es, die Werte $\varphi(p)$ aller Aussagevariablen $p \in V$ zu kennen, die in A vorkommen.

1.6 Lemma. Jede Belegung $\psi : V \to \mathbb{B}$ lässt sich auf genau eine Weise zu einer Bewertung $\varphi : F \to \mathbb{B}$ fortsetzen.

Der Beweis folgt unmittelbar aus Satz 1.4 und Definition 1.5.

1.7 Korollar. Jede Bewertung $\varphi : F \to \mathbb{B}$ ist eindeutig durch die Werte von φ auf V festgelegt.

Als Beispiel sei $\varphi(p) = 1$, $\varphi(q) = 1$, $\varphi(r) = 0$. Dann ergibt sich für die unten stehende Formel $A \in F$ die Bewertung $\varphi(A) = 1$ iterativ wie folgt:

$$A \equiv \underbrace{(\underbrace{(\underbrace{p}_{1} \to \underbrace{(\underbrace{q}_{1} \to \underbrace{r}_{0})}_{0})}_{0} \to \underbrace{(\underbrace{(\underbrace{p}_{1} \wedge \underbrace{q}_{1})}_{1} \to \underbrace{r}_{0})}_{0})}_{1} \tag{1}$$

Welche Werte kann $\varphi(A)$ annehmen, wenn φ *alle* Belegungen der in A vorkommenden Variablen durchläuft. Ist etwa $\varphi(A) = 1$ für alle Belegungen? Intuitiv stellt eine solche Formel keine weiteren Bedingungen an ein zugrundeliegendes, beschriebenes System. Die Beobachtung, dass es aussagenlogische Formeln gibt, die *wahr* sind unabhängig davon, wie ihre Variablen belegt werden, legt die folgende Definition nahe.

1.8 Definition. Seien $A \in F$ und $\Sigma \subseteq F$.

1. Dann heißt A *Tautologie* oder *allgemeingültig*, falls $\varphi(A) = 1$ für jede Bewertung φ gilt. Man schreibt auch $\models A$, falls A eine Tautologie ist.

2. Die Formel A ist *erfüllbar*, falls es eine Bewertung mit $\varphi(A) = 1$ gibt.

3. Formel A ist ein *Widerspruch*, falls für jede Bewertung $\varphi(A) = 0$ gilt.

4. Eine Formelmenge Σ ist *erfüllbar*, falls es eine Bewertung φ gibt, so dass für alle $A \in \Sigma$ gilt $\varphi(A) = 1$. Man sagt auch φ *erfüllt* Σ.

5. Formel A ist eine *logische Folgerung* aus der Formelmenge Σ, falls für jede Bewertung φ, die Σ erfüllt, auch $\varphi(A) = 1$ gilt. Die Notation für diesen *semantischen Folgerungsbegriff* ist $\Sigma \models A$. Ist $\Sigma = \{A_1, \ldots, A_n\}$, so ist die Kurzschreibweise $A_1, \ldots, A_n \models A$ üblich.

6. Die *Menge Folg*(Σ) *der Folgerungen aus* Σ ist definiert durch:

$$\text{Folg}(\Sigma) := \{A \in F \quad | \quad \Sigma \models A\}.$$

Zum Beispiel sind $p \vee \neg p$ sowie $(p \to q) \vee (q \to r)$ Tautologien und $p \wedge \neg p$ ein Widerspruch. Die Formel $p \wedge q$ ist erfüllbar jedoch keine Tautologie. Es gilt $\{p\} \models p \vee q$, denn falls $\varphi(p) = 1$, dann auch $\varphi(p \vee q) = 1$.

Seien die *Menge aller Tautologien* bzw. die *Menge aller erfüllbaren Formeln* definiert als

$$\text{TAUT} := \{A \in F \quad | \models A\} \quad \text{und} \quad \text{SAT} := \{A \in F \quad | \quad A \text{ ist erfüllbar}\}.$$

Es lässt sich leicht prüfen, ob eine Formel allgemeingültig oder erfüllbar ist.

1.9 Lemma. Die Mengen TAUT und SAT sind entscheidbar.

Zum Beweis des Lemmas ist ein Verfahren anzugeben, das für eine gegebene Formel $A \in F$ prüft, ob A in TAUT (bzw. SAT) liegt, also eine Tautologie ist. Die Idee ist, die *endlich* vielen Belegungen der in A vorkommenden Variablen zu betrachten. Kommen $n \in \mathbb{N}$ Variablen in A vor, so gibt es 2^n verschiedene Belegungen. Als Beispiel soll die Formel A von oben betrachtet werden. Die drei Variablen p, q und r aus A führen zu acht Belegungen:

$\varphi(p)$	$\varphi(q)$	$\varphi(r)$	$\varphi(q \to r)$	$\varphi(p \wedge q)$	$\varphi(p \to (q \to r))$	$\varphi((p \wedge q) \to r)$	$\varphi(A)$
0	0	0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1	1
0	1	0	0	0	1	1	1
0	1	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1	1
1	0	1	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Da $\varphi(A) = 1$ für jede Bewertung $\varphi : F \to \mathbb{B}$ gilt, ist $A \in \text{TAUT}$.

1.10 Lemma. Folgende Schlüsse und Äquivalenzen sind mit den bisherigen Definition gültig.

1. Es gilt $\emptyset \models A$ genau dann, wenn A allgemeingültig ist: $\text{Folg}(\emptyset) = \text{TAUT}$.
2. Ist Σ nicht erfüllbar, dann gilt $\Sigma \models A$ für alle $A \in F$, also $\text{Folg}(\Sigma) = F$.
3. Sei $\Sigma \subseteq \Sigma'$. Ist Σ' erfüllbar, dann ist auch Σ erfüllbar.
4. Es gilt $\Sigma \subseteq \text{Folg}(\Sigma)$ und $\text{Folg}(\text{Folg}(\Sigma)) = \text{Folg}(\Sigma)$.
5. Falls $\Sigma \subseteq \Sigma'$, dann gilt $\text{Folg}(\Sigma) \subseteq \text{Folg}(\Sigma')$.
6. $\Sigma \models A$ gilt genau dann, wenn $\Sigma \cup \{\neg A\}$ nicht erfüllbar ist.
7. Ist Σ endlich, dann ist es entscheidbar, ob Σ erfüllbar ist. Die Menge $\text{Folg}(\Sigma)$ ist dann ebenfalls entscheidbar.

Die folgenden Äquivalenzen sind hilfreich, um logische Folgerungen mit Hilfe von Beweiskalkülen zu automatisieren. Dabei wird Σ, A als Kurzschreibweise für $\Sigma \cup \{A\}$ genutzt.

1.11 Lemma (Deduktionstheorem (semantische Version) und Modus-Ponens)**.**

a) Deduktionstheorem: $\Sigma, A \models B$ gilt genau dann, wenn $\Sigma \models (A \to B)$.

b) Modus-Ponens-Regel: Es gilt $\{A, A \to B\} \models B$.

Beweis. Es soll im Deduktionstheorem die Implikation von links nach rechts gezeigt werden. Der Beweis der Rückrichtung ist ähnlich. Gelte $\Sigma, A \models B$ und sei $\varphi : F \to \mathbb{B}$ eine Bewertung, die Σ erfüllt. Ist $\varphi(A) = 0$, dann ist $\varphi(A \to B) = 1$ und der gewünschte Schluss gilt. Ist $\varphi(A) = 1$, dann greift die Voraussetzung und liefert $\varphi(B) = 1$, so dass wiederum $\varphi(A \to B) = 1$ folgt.

Für den Beweis der Modus-Ponens-Regel, betrachte eine Bewertung mit $\varphi(A) = \varphi(A \to B) = 1$. Dann folgt per Definition der Implikation, dass $\varphi(B) = 1$. ■

Mit der Modus-Ponens-Regel ist insbesondere B eine Tautologie, falls A und $A \to B$ Tautologien sind.

1.3 Kompaktheit

Eine Formelmenge $\Sigma \subseteq F$ heißt *endlich erfüllbar*, wenn jede endliche Teilmenge von Σ erfüllbar ist. Der Kompaktheitssatz besagt, dass Erfüllbarkeit und die auf den ersten Blick schwächere endliche Erfüllbarkeit übereinstimmen. Um diese Aussage zu zeigen, benötigen wir die Tatsache, dass endlich erfüllbare Mengen erweiterbar sind.

1.12 Lemma. Sei Γ endlich erfüllbar und sei $A \in F$. Dann ist $\Gamma \cup \{A\}$ oder $\Gamma \cup \{\neg A\}$ endlich erfüllbar.

Beweis. Wir setzen oBdA. voraus, dass $\{A, \neg A\} \cap \Gamma = \emptyset$, sonst ist die Aussage trivial. Angenommen $\Gamma \cup \{A\}$ ist nicht endlich erfüllbar. Um zu zeigen, dass $\Gamma \cup \{\neg A\}$ endlich erfüllbar ist, betrachte eine beliebig gewählte endliche Menge $\Gamma_1 \subseteq \Gamma \cup \{\neg A\}$ und zeige, dass sie erfüllbar ist.

Da $\Gamma \cup \{A\}$ nicht endlich erfüllbar ist, gibt es eine endliche Teilmenge $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, so dass $\Gamma_0 \cup \{A\}$ nicht erfüllbar ist. Nun ist $\Gamma_2 := \Gamma_0 \cup (\Gamma_1 \backslash \{\neg A\}) \subseteq \Gamma$ endlich und also auch erfüllbar. Es gibt somit eine Bewertung φ, die Γ_2 erfüllt. Diese Bewertung erfüllt auch Γ_0. Dann ist aber $\varphi(A) = 0$, d.h. $\varphi(\neg A) = 1$. Also erfüllt φ auch $\Gamma_2 \cup \{\neg A\}$. Damit erfüllt φ aber auch Γ_1, wie gefordert. Also ist $\Gamma \cup \{\neg A\}$ endlich erfüllbar. ■

1.13 Satz (Kompaktheitssatz der Aussagenlogik)**.** Eine Formelmenge $\Sigma \subseteq F$ ist endlich erfüllbar genau dann, wenn Σ erfüllbar ist.

Beweis. Die Rückrichtung folgt aus Lemma 1.10(3). Der Trick im Beweis der Implikation von links nach rechts ist die Konstruktion einer maximalen, endlich erfüllbaren Menge $\Delta \subseteq F$. Die Menge Δ soll Σ enthalten und wird um weitere Formeln angereichert, bis die in Σ vorkommenden Variablen gefunden sind. Die Variablen liefern nun eine erfüllende Belegung für ganz Σ.

Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Aufzählung der Menge F aller aussagenlogischen Formeln. Zunächst wird eine aufsteigende Folge $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Formelmengen $\Delta_n \subseteq F$ definiert, wobei $\Delta_0 := \Sigma$ und

$$\Delta_{n+1} := \begin{cases} \Delta_n \cup \{A_{n+1}\}, & \text{falls } \Delta_n \cup \{A_{n+1}\} \text{ endlich erfüllbar,} \\ \Delta_n \cup \{\neg A_{n+1}\}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufsteigend bedeutet hier, dass $\Delta_0 \subseteq \Delta_1 \subseteq \dots$ gilt. Mit Lemma 1.12 ist Δ_n endlich erfüllbar für alle $n \in \mathbb{N}$. Die oben erwähnte Menge von Interesse ist die Vereinigung

$$\Delta := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n.$$

Es lässt sich leicht prüfen, dass Δ endlich erfüllbar ist. Ferner ist für jede Formel $A \in F$ entweder $A \in \Delta$ oder $\neg A \in \Delta$. Wegen der endlichen Erfüllbarkeit von Δ sind jedoch nicht beide Formeln enthalten. Definiere $\psi : V \to \mathbb{B}$ durch

$$\psi(p) := \begin{cases} 1, & \text{falls } p \in \Delta \\ 0, & \text{falls } \neg p \in \Delta. \end{cases}$$

Da entweder p oder $\neg p$ in Δ enthalten sind, ist ψ wohldefiniert. Mit Lemma 1.6 lässt sich ψ eindeutig zu einer Belegung aller Formeln $\varphi : F \to \mathbb{B}$ fortsetzen. Durch Induktion über den Aufbau von F lässt sich nun zeigen, dass für alle Formeln $A \in F$ gilt:

$$\varphi(A) = 1 \quad \text{genau dann, wenn} \quad A \in \Delta. \tag{2}$$

Da per Definition $\Sigma \subseteq \Delta$ gilt, haben wir insbesondere $\varphi(A') = 1$ für alle $A' \in \Sigma$. Damit ist Σ erfüllbar.

Es bleibt Äquivalenz (2) zu zeigen. Der Basisfall gilt per Definition von ψ. Angenommen die Aussage gilt für Formeln A und B aus F und betrachte die Formel $A \to B$. Falls $\varphi(A \to B) = 1$, dann ist $\varphi(A) = 0$ oder $\varphi(B) = 1$. Also ist per Induktionsvoraussetzung $\neg A \in \Delta$ oder $B \in \Delta$. Damit wurde $\varphi(A \to B)$ in Δ aufgenommen, wie gefordert. Ist andererseits $\varphi(A \to B) = 0$, dann ist $\varphi(A) = 1$ und $\varphi(B) = 0$. Also ist per Induktionsvoraussetzung $A \in \Delta$ und $\neg B \in \Delta$. Damit gilt $\neg(A \to B) \in \Delta$ und wegen der endlichen Erfüllbarkeit von Δ folgt $(A \to B) \notin \Delta$. ∎

1.14 Korollar. Es gilt $\Sigma \models A$ genau dann, wenn es eine endliche Teilmenge $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ gibt mit $\Sigma_0 \models A$.

Eine weitere Anwendung des Kompaktheitssatzes ist die folgende Aussage.

> Sei $\Sigma \subseteq F$. Gibt es zu jeder Bewertung φ ein $A \in \Sigma$ mit $\varphi(A) = 1$, so gibt es $A_1, \ldots, A_n \in \Sigma$ mit $n > 0$, so dass $\models A_1 \vee \ldots \vee A_n$.

Betrachte die Formelmenge $\Sigma' := \{\neg A \mid A \in \Sigma\}$. Nach Voraussetzung ist die Menge unerfüllbar. Angenommen es gäbe eine Bewertung φ, die jede Formel in Σ' erfüllt. Dann erfüllt φ auch $\neg A$ mit dem $A \in \Sigma$, das $\varphi(A) = 1$ garantiert. Ein Widerspruch. Da die Menge unerfüllbar ist, gibt es mit dem Kompaktheitssatz eine endliche Teilmenge $\{\neg A_1, \ldots, \neg A_n\}$ von Σ', die unerfüllbar ist. Wegen der Unerfüllbarkeit ist die Menge nicht leer. Also gibt es für jede Belegung φ ein i mit $\varphi(\neg A_i) = 0$. Dann ist aber $\varphi(A_i) = 1$ und daher auch $\varphi(A_1 \vee \ldots \vee A_n) = 1$.