WS 2023/2024 15.12.2023

Übungen zur Vorlesung
Programmanalyse
Blatt 8

Abgabe bis 20.12.2023

Aufgabe 8.1 (Produkte und Kompositionen von Galoisverbindungen)
Beweisen Sie, dass die folgenden Produkte und Kompositionen von Galoisverbindungen wieder Galoisverbindungen definieren.

a) Seien $(L_i, \leq_i)$ vollständige Verbände für $i \in \{1,2,3\}$ und seien α_i, γ_i Galoisverbindungen für $i \in \{1,2\}$ mit $\alpha_i : L_i \to L_{i+1}$ und $\gamma_i : L_{i+1} \to L_i$. Dann ist $(\alpha_2 \circ \alpha_1, \gamma_1 \circ \gamma_2)$ eine Galoisverbindung zwischen $(L_1, \leq_1)$ und $(L_3, \leq_3)$.

b) Seien α_i, γ_i Galoisverbindungen für $i \in \{1,2\}$ mit $\alpha_i : \mathcal{P}(V_i) \to \mathcal{P}(D_i)$ und $\gamma_i : \mathcal{P}(D_i) \to \mathcal{P}(V_i)$. Dann ist (α, γ) eine Galoisverbindung mit

$$\alpha : \mathcal{P}(V_1 \times V_2) \to \mathcal{P}(D_1 \times D_2) \quad \alpha(V') = \bigcup_{(v_1,v_2) \in V'} \alpha_1(\{v_1\}) \times \alpha_2(\{v_2\}),$$

$$\gamma : \mathcal{P}(D_1 \times D_2) \to \mathcal{P}(V_1 \times V_2) \quad \gamma(D') = \{(v_1, v_2) \mid \alpha_1(\{v_1\}) \times \alpha_2(\{v_2\}) \subseteq D'\}.$$

Aufgabe 8.2 (Sichere Approximation)
Sei (α, γ) eine Galois-Verbindung zwischen L und M und $f : L \to L$ eine Funktion, sowie $f^\sharp : M \to M$ eine sichere Approximation von f. Angenommen, f und $f^\sharp$ sind monoton. Beweisen Sie folgende Äquivalenz.

$$\alpha \circ f \circ \gamma \leq f^\sharp \qquad \text{gdw.} \qquad \alpha \circ f \leq f^\sharp \circ \alpha$$

Aufgabe 8.3 (Abstrakte Interpretation)
Das folgende Programm berechnet die *Hailstone-Folge.*

while $[x \neq 1]^1$ **do**
  if $[\text{even}(x)]^2$ **then**
    $[x := \lfloor x/2 \rfloor]^3$
  else
    $[x := 3x + 1]^4$

Berechnen Sie das Transitionssystem dieses Programms auf der abstrakten Domäne $\mathcal{P}((\{odd, even\}))$. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

a) Geben Sie zuerst sichere Approximationen für die Funktionen $x \mapsto \lfloor x/2 \rfloor$, $x \mapsto 3x+1$ sowie die Prädikate $\text{even}(x)$ und $x \neq 1$ an.

b) Bestimmen Sie das abstrakte Transitionssystem. Nutzen Sie als Startwert $\{\text{odd}\}$.
Hinweis: Transitionen von $\emptyset$ können Sie weglassen.

Abgabe bis 20.12.2023 per E-Mail an j.tepe@tu-braunschweig.de