Theoretische Informatik 1
Übungsblatt 1

Ausgabe: 17.10.2018 Abgabe: 25.10.2018, 14:00

Geben Sie Ihre Lösungen bis Donnerstag, 25.10.2018, 14:00 Uhr, durch Einwerfen in die Übungskästen neben Büro IZ 343 ab. Geben Sie in Gruppen von **4 Personen** ab.

Tragen Sie sich bis zum 23.10.2018, 12:00 Uhr, auf den Listen, die neben Büro IZ 344 aushängen, für eine Übungsgruppe ein. Nutzen Sie z.B. die Veranstaltungen am 22. & 23.10 um sich mit anderen Studierenden aus der selben Übungsgruppe zu Abgabegruppen zusammenzuschließen.

Aufgabe 1: Lemma 1.1, Teil a)
Sei $(D, \preceq)$ ein beliebiger vollständiger Verband. Zeigen Sie dass $(D, \preceq)$ ein eindeutiges kleinstes Element $\bot$, genannt **Bottom**, mit folgender Eigenschaft hat:

$$\bot = \bigsqcap D = \bigsqcup \varnothing.$$

Anmerkung: Analog lässt sich zeigen, dass es immer ein eindeutiges größtes Element $\top$, genannt **Top**, gibt mit $\top = \bigsqcup D = \bigsqcap \varnothing$.

Aufgabe 2: Lemma 1.1, Teil c)
Sei $(D, \preceq)$ ein endlicher Verband, d.h. ein Verband, bei dem D endlich ist.

Beweisen Sie zunächst exemplarisch, dass das Bilden von Joins assoziativ ist:
Für $x, y, z \in D$ gilt:

$$\bigsqcup \{x, y, z\} = (x \sqcup y) \sqcup z = x \sqcup (y \sqcup z) .$$

Beweisen Sie nun, dass $(D, \preceq)$ bereits ein vollständiger Verband ist. Zeigen Sie hierzu formal (per Induktion), dass der Join $\bigsqcup D'$ für alle $D' \subseteq D$ existiert.

Aufgabe 3: Ein Verband
Seien $M_1 \subseteq \mathbb{N}$ und $M_2 \subseteq \mathbb{N}$ zwei endliche Mengen und $M = M_1 \times M_2$ die Menge aller Tupel (a, b) mit $a \in M_1$ und $b \in M_2$. Sei $\preceq$ eine Relation auf M, die wie folgt definiert ist

$$(a_1, b_1) \preceq (a_2, b_2) \quad \text{gdw.} \quad a_1 \geqslant a_2 \text{ und } b_1 \geqslant b_2$$

wobei $\leqslant$ die gewöhnliche "kleiner gleich" Relation auf den natürlichen Zahlen ist.

- Zeigen Sie dass $\preceq$ reflexiv, transitiv und antisymmetrisch ist.

  Damit ist gezeigt dass $(M, \preceq)$ eine partielle Ordnung ist.

- Zeigen Sie dass der Join $\bigsqcup M'$ und der Meet $\bigsqcap M'$ für jede Teilmenge $M' \subseteq M$ existieren.

  Damit ist gezeigt, dass dass $(M, \preceq)$ ein vollständiger Verband ist.

- Geben Sie $\top, \bot$ für diesen Verband an.
- Ist $(M, \preceq)$ immer noch ein vollständiger Verband wenn $M_1 \subseteq \mathbb{N}$ eine unendliche Menge ist?

Aufgabe 4: Verbände

a) Betrachten Sie den vollständigen Verband $(D, \preceq)$ mit $D = \mathbb{N} \cup \{-, ?\}$. Hierbei ist $\preceq$ eine partielle Ordnung, die wie folgt definiert ist: Für $x, y \in D$ gilt $x \preceq y$ falls $x = -$, oder $y = ?$ oder $x = y = n$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

- Zeichnen Sie das Hasse-Diagramm von $(D, \preceq)$. Beschränken Sie sich auf Zahlen $\leqslant 7$.
- Geben Sie $\top$ und $\bot$ für diesen Verband an.
- Geben Sie die Werte der folgenden Joins und Meets an:
  - $\bot \sqcup \top$
  - $\bot \sqcap \top$
  - $\top \sqcup 4$
  - $5 \sqcap 6$
  - $\bot \sqcup 3$
  - $1 \sqcup 2$
  - $\bigsqcup \mathbb{N}$

b) Zu einer Menge M sei $\mathcal{P}(M) = \{M' \mid M' \subseteq M\}$, die Menge aller Teilmengen von M, genannt **Potenzmenge** von M. Wir definieren die partielle Ordnung $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$, wobei $M' \subseteq M''$ wie üblich genau dann gilt, wenn M' eine Teilmenge von M'' ist.

- Zeigen Sie, dass der Join $\bigsqcup \mathcal{M}'$ und der Meet $\bigsqcap \mathcal{M}'$ für jede Menge $\mathcal{M}' \subseteq \mathcal{P}(M)$ existieren.

  Damit ist gezeigt, dass dass $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$ immer – d.h. für alle Mengen M – ein vollständiger Verband ist, der **Potenzmengenverband** zu M.

- Geben Sie $\top$ und $\bot$ für $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$ an.