Thomas Haas	**Theoretische Informatik 1** **Übungsblatt 1**	TU Braunschweig
Prof. Dr. Roland Meyer		Wintersemester 2019/20

Ausgabe: 29.10.2019 Abgabe: 07.11.2019, 14:00

Geben Sie Ihre Lösungen bis Donnerstag, 07.11.2019, 14:00 Uhr, durch Einwerfen in die Übungskästen neben Büro IZ 343 ab. Geben Sie in Gruppen von **4 Personen*** ab.

Tragen Sie sich bis zum einschließlich 31.11.2019 in dem auf der Webseite verlinkten Onlineanmeldesystem **"Zahnrad"** ein.

Nutzen Sie spätestens die ersten Extraübungen in der zweiten Vorlesungswoche (04.11 - 08.11) um sich in 4er Gruppen einzufinden.

*Da die Abgabe dieser Hausaufgabe bereits am 07.11 ist, gestatten wir **ausnahmsweise** auch Einzelabgaben und Abgaben in kleineren Gruppen.

Aufgabe 1: Lemma 1.1, Teil a) [5 Punkte]

Sei $(D, \leq)$ ein beliebiger vollständiger Verband. Zeigen Sie dass $(D, \leq)$ ein eindeutiges kleinstes Element $\bot$, genannt **Bottom**, mit folgender Eigenschaft hat:

$$\bot = \bigsqcap D = \bigsqcup \emptyset.$$

Anmerkung: Analog lässt sich zeigen, dass es immer ein eindeutiges größtes Element $\top$, genannt **Top**, gibt mit $\top = \bigsqcup D = \bigsqcap \emptyset$.

Aufgabe 2: Lemma 1.1, Teil c) [5 Punkte]

Sei $(D, \leq)$ ein endlicher Verband, d.h. ein Verband, bei dem D endlich ist.

Beweisen Sie zunächst die folgende Hilfsaussage: Sei $X \subseteq D$ eine Menge, deren Join $\bigsqcup X$ existiert, und sei $y \in D$. Dann gilt:

$$\left(\bigsqcup X\right) \sqcup y = \bigsqcup (X \cup \{y\}) .$$

Insbesondere: Der Join von $X \cup \{y\}$ existiert.

Beweisen Sie nun, dass $(D, \leq)$ bereits ein vollständiger Verband ist. Zeigen Sie hierzu formal (per Induktion), dass Join und Meet für alle $D' \subseteq D$ existieren.

Aufgabe 3: Ein Verband [5 Punkte]

Seien $M_1 \subseteq \mathbb{N}$ und $M_2 \subseteq \mathbb{N}$ zwei endliche Mengen und $M = M_1 \times M_2$ die Menge aller Tupel (a, b) mit $a \in M_1$ und $b \in M_2$. Sei $\leq$ eine Relation auf M, die wie folgt definiert ist

$$(a_1, b_1) \leq (a_2, b_2) \quad \text{gdw.} \quad a_1 \geqslant a_2 \text{ und } b_1 \geqslant b_2$$

wobei $\leqslant$ die gewöhnliche "kleiner gleich" Relation auf den natürlichen Zahlen ist.

- Zeigen Sie dass $\preceq$ reflexiv, transitiv und antisymmetrisch ist.

  Damit ist gezeigt dass $(M, \preceq)$ eine partielle Ordnung ist.

- Zeigen Sie dass der Join $\bigsqcup M'$ und der Meet $\bigsqcap M'$ für jede Teilmenge $M' \subseteq M$ existieren.

  Damit ist gezeigt, dass $(M, \preceq)$ ein vollständiger Verband ist.

- Geben Sie $\top, \bot$ für diesen Verband an.

- Ist $(M, \preceq)$ immer noch ein vollständiger Verband wenn $M_1 \subseteq \mathbb{N}$ eine unendliche Menge ist?

Aufgabe 4: Verbände [10 Punkte]

a) [5 Punkte] Betrachten Sie den vollständigen Verband $(D, \preceq)$ mit $D = \mathbb{N} \cup \{-, ?\}$. Hierbei ist $\preceq$ eine partielle Ordnung, die wie folgt definiert ist: Für $x, y \in D$ gilt $x \preceq y$ falls $x = -$, oder $y = ?$ oder $x = y = n$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

   - Zeichnen Sie das Hasse-Diagramm von $(D, \preceq)$. Beschränken Sie sich auf Zahlen $\leqslant 7$.

   - Geben Sie $\top$ und $\bot$ für diesen Verband an.

   - Geben Sie die Werte der folgenden Joins und Meets an:

     - $\bot \sqcup \top$
     - $\bot \sqcap \top$
     - $\top \sqcup 4$
     - $5 \sqcap 6$
     - $\bot \sqcup 3$
     - $1 \sqcup 2$
     - $\bigsqcup \mathbb{N}$

b) [5 Punkte] Zu einer Menge M sei $\mathcal{P}(M) = \{M' \mid M' \subseteq M\}$, die Menge aller Teilmengen von M, genannt **Potenzmenge** von M. Wir definieren die partielle Ordnung $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$, wobei $M' \subseteq M''$ wie üblich genau dann gilt, wenn M' eine Teilmenge von M'' ist.

   - Zeigen Sie, dass der Join $\bigsqcup \mathcal{M}'$ und der Meet $\bigsqcap \mathcal{M}'$ für jede Menge $\mathcal{M}' \subseteq \mathcal{P}(M)$ existieren.

     Damit ist gezeigt, dass $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$ immer – d.h. für alle Mengen M – ein vollständiger Verband ist, der **Potenzmengenverband** zu M.

   - Geben Sie $\top$ und $\bot$ für $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$ an.