# Theoretische Informatik 1
# Übungsblatt 0

Thomas Haas
Prof. Dr. Roland Meyer

TU Braunschweig
Wintersemester 2020/21

Ausgabe: 20.10.2020

Dies ist ein Übungsblatt und muss weder bearbeitet noch abgegeben werden. Die Lösungen zu diesem Blatt werden in der großen Übung am 27. Oktober besprochen.

Bitte melden Sie sich bis zum 30. Oktober für die kleinen Übungen an.

**Aufgabe 1: Lemma 1.1, Teil a)**
Sei $(D, \preceq)$ ein beliebiger vollständiger Verband. Zeigen Sie dass $(D, \preceq)$ ein eindeutiges kleinstes Element $\bot$, genannt **Bottom**, mit folgender Eigenschaft hat:

$$\bot = \bigsqcap D = \bigsqcup \varnothing.$$

*Anmerkung:* Analog lässt sich zeigen, dass es immer ein eindeutiges größtes Element $\top$, genannt **Top**, gibt mit $\top = \bigsqcup D = \bigsqcap \varnothing$.

**Aufgabe 2: Lemma 1.1, Teil c)**
Sei $(D, \preceq)$ ein endlicher Verband, d.h. ein Verband, bei dem $D$ endlich ist.

Beweisen Sie zunächst die folgende Hilfsaussage: Sei $X \subseteq D$ eine Menge, deren Join $\bigsqcup X$ existiert, und sei $y \in D$. Dann gilt:

$$\left(\bigsqcup X\right) \sqcup y = \bigsqcup (X \cup \{y\}) \,.$$

Insbesondere: Der Join von $X \cup \{y\}$ existiert.

Beweisen Sie nun, dass $(D, \preceq)$ bereits ein vollständiger Verband ist. Zeigen Sie hierzu formal (per Induktion), dass Join und Meet für alle $D' \subseteq D$ existieren. Die dürfen annehmen, dass die obige Hilfsaussage auch analog für Meets gilt (der Beweis ist nahezu identisch).

**Aufgabe 3: Ein Verband**
Seien $M_1 \subseteq \mathbb{N}$ und $M_2 \subseteq \mathbb{N}$ zwei endliche Mengen und $M = M_1 \times M_2$ die Menge aller Tupel $(a, b)$ mit $a \in M_1$ und $b \in M_2$. Sei $\preceq$ eine Relation auf $M$, die wie folgt definiert ist

$$(a_1, b_1) \preceq (a_2, b_2) \quad \text{gdw.} \quad a_1 \geqslant a_2 \text{ und } b_1 \geqslant b_2$$

wobei $\leqslant$ die gewöhnliche "kleiner gleich" Relation auf den natürlichen Zahlen ist.

- Zeigen Sie dass $\preceq$ reflexiv, transitiv und antisymmetrisch ist.

  Damit ist gezeigt dass $(M, \preceq)$ eine partielle Ordnung ist.

- Zeigen Sie dass der Join $\bigsqcup M'$ und der Meet $\bigsqcap M'$ für jede Teilmenge $M' \subseteq M$ existieren.

  Damit ist gezeigt, dass $(M, \preceq)$ ein vollständiger Verband ist.

- Geben Sie $\top, \bot$ für diesen Verband an.

- Ist $(M, \preceq)$ immer noch ein vollständiger Verband wenn $M_1 \subseteq \mathbb{N}$ eine unendliche Menge ist?

**Aufgabe 4: Verbände**

a) Betrachten Sie den vollständigen Verband $(D, \preceq)$ mit $D = \mathbb{N} \cup \{-, ?\}$. Hierbei ist $\preceq$ eine partielle Ordnung, die wie folgt definiert ist: Für $x, y \in D$ gilt $x \preceq y$ falls $x = -$, oder $y = ?$ oder $x = y = n$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

   - Zeichnen Sie das Hasse-Diagramm von $(D, \preceq)$. Beschränken Sie sich auf Zahlen $\leqslant 7$.

   - Geben Sie $\top$ und $\bot$ für diesen Verband an.

   - Geben Sie die Werte der folgenden Joins und Meets an:

     - $\bot \sqcup \top$
     - $\bot \sqcap \top$
     - $\top \sqcup 4$
     - $5 \sqcap 6$
     - $\bot \sqcup 3$
     - $1 \sqcup 2$
     - $\bigsqcup \mathbb{N}$

b) Zu einer Menge $M$ sei $\mathcal{P}(M) = \{A \mid A \subseteq M\}$, die Menge aller Teilmengen von $M$, genannt **Potenzmenge** von $M$. Wir definieren die partielle Ordnung $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$, wobei $A \subseteq B$ wie üblich genau dann gilt, wenn $A$ eine Teilmenge von $B$ ist.

   - Zeigen Sie, dass der Join $\bigsqcup \mathcal{M}$ und der Meet $\bigsqcap \mathcal{M}$ für jede Menge $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(M)$ existieren. Beachten Sie, dass $\mathcal{M}$ hier eine Menge von Teilmengen von $M$ ist.

     Damit ist gezeigt, dass $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$ immer – d.h. für alle Mengen $M$ – ein vollständiger Verband ist, der **Potenzmengenverband** zu $M$.

   - Geben Sie $\top$ und $\bot$ für $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$ an.