Theoretische Informatik 1
Übungsblatt 1

Thomas Haas
Prof. Dr. Roland Meyer

TU Braunschweig
Wintersemester 2020/21

Ausgabe: 03.11.2020 Abgabe: 13.11.2020, 17:00

Geben Sie Ihre Lösungen bis Freitag, 13.11.2020 17:00 Uhr, per E-Mail an ihren Tutor ab. Fertigen Sie dazu ihre Hausaufgaben direkt in .pdf Form an oder scannen ihre handschriftlichen Hausaufgaben ein. Geben Sie in Gruppen von **4 Personen** ab.

Aufgabe 1: Verbände [10 Punkte]

a) [4 Punkte] Es seien $(D_1, \preceq_1)$ und $(D_2, \preceq_2)$ vollständige Verbände. Der **Produktverband** ist als $(D_1 \times D_2, \preceq)$ definiert. Hierbei ist $\preceq$ die **Produktordnung** auf Tupeln mit $(d_1, d_2) \preceq (d_1', d_2')$ gdw. $d_1 \preceq_1 d_1'$ und $d_2 \preceq_2 d_2'$.

   Zeigen Sie, dass er seinem Namen entsprechend tatsächlich ein vollständiger Verband ist.

b) [4 Punkte] Beweisen Sie: Der Produktverband $(D_1 \times D_2, \preceq)$ erfüllt genau dann die ACC, wenn sowohl $(D_1, \preceq_1)$ als auch $(D_2, \preceq_2)$ die ACC erfüllen.

c) [2 Punkte] Geben Sie jeweils ein Hasse-Diagramme für einen Verband an, der

   - unendlich ist, aber beschränkte Höhe hat.
   - endliche Höhe, aber keine beschränkte Höhe hat.

Aufgabe 2: Distributivität [4 Punkte]

Seien $(D, \leqslant)$ ein Verband und $x, y \in D$.

a) [2 Punkte] Zeigen Sie: Ist $f : D \to D$ monoton, so gilt $f(x \sqcup y) \geqslant f(x) \sqcup f(y)$.

b) [2 Punkte] $f : D \to D$ heißt **distributiv**, falls $f(x \sqcup y) = f(x) \sqcup f(y)$ für alle $x, y \in D$.
   Zeigen Sie: Falls f distributiv ist, so ist f auch monoton.

Aufgabe 3: Reaching Definitions-Analyse [10 Punkte]

Hinweis: Die Reaching Definitions-Analyse wird in der Vorlesung nächster Woche behandelt.

Führen Sie für das folgende Programm eine Reaching-Definitions-Analyse durch.

$[x := 5]^1$
while $[x < 7]^2$ **do**
  $[y := y - 1]^3$
  if $[y = 7]^4$ **then**
    $[y := y + 3]^5$
  else
    $[x := x - 1]^6$
  end if
end while
$[\mathit{skip}]^7$

a) [2 Punkte] Zeichnen Sie den Kontrollflussgraphen G.

b) [3 Punkte] Betrachten Sie den Verband $\mathcal{D} = (\mathcal{P}(\{x, y\} \times (\{1, \ldots, 6\} \uplus \{?\})), \subseteq)$. Geben Sie für die Blöcke 1 – 6 geeignete monotone Transferfunktionen über diesem Verband an.

c) [5 Punkte] Betrachten Sie das Datenflusssystem $(G, (D, \leqslant), \{(x, ?), (y, ?)\}, \mathrm{TF})$, wobei TF die Transferfunktionen aus Teil b) sind. Geben Sie das induzierte Gleichungssystem an und bestimmen Sie seine kleinste Lösung mit dem Satz von Kleene.

Aufgabe 4: Datenflussanalysen [10 Punkte]

Hinweis: Die folgenden Datenflussanalysen werden NICHT in der Vorlesung nächster Woche behandelt. Die Vorlesung nächste Woche wird allerdings zeigen wie Kleene's Theorem zur Lösung der Gleichungssystem benutzt werden kann.

Betrachten Sie das folgende Programm.

$[x := 3]^1$
$[x := x + 7]^2$
while $[x < 25]^3$ **do**
  $[x := x + 4]^4$
end while
$[\mathit{skip}]^5$

a) [2 Punkte] Zeichnen Sie den Kontrollflussgraphen G.

b) [4 Punkte] Betrachten Sie den Verband $\mathcal{D} = (\mathbb{N} \uplus \{\bot, \top\}, \preceq)$ mit $\bot \preceq n \preceq \top$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ aus Aufgabe 4a) des ersten Übungsblatts.

Wir interpretieren die Verbandselemente wie folgt als Datenflusswerte:

$\bot$: Variable x is am Eingang des Blocks nicht initialisiert.

$n \in \mathbb{N}$: Variable x ist am Eingang des Blocks konstant Wert n (ist also garantiert n).

$\top$: Variable x is am Eingang des Blocks nicht konstant.

Führen Sie nun mit diesem Verband eine Vorwärts-Datenflussanalyse durch:

- Stellen Sie das Datenflusssystem $(G, \mathcal{D}, \bot, \mathrm{TF})$ auf. Geben Sie hierzu zu jedem der Blöcke 1 – 5 eine monotone Transferfunktion an.
- Stellen Sie das induzierte Gleichungssystem auf.
- Bestimmten Sie seine kleinste Lösung.

c) [4 Punkte] Betrachten Sie nun den Verband $\mathcal{D}' = (\mathcal{P}(\{e, o\}), \subseteq)$.

Wir interpretieren die Verbandselemente wie folgt als Datenflusswerte:

$\varnothing$: Variable x is am Eingang des Blocks nicht initialisiert.

$\{e\}$: Variable x ist am Eingang des Blocks garantiert gerade (*even*).

$\{o\}$: Variable x ist am Eingang des Blocks garantiert ungerade (*odd*).

$\{e, o\}$: Es ist nicht klar, ob Variable x gerade oder ungerade ist.

Führen Sie nun mit diesem Verband eine Vorwärts-Datenflussanalyse durch:

- Stellen Sie das Datenflusssystem $(G, \mathcal{D}', \varnothing, \mathrm{TF})$ auf. Geben Sie hierzu zu jedem der Blöcke 1 – 5 eine monotone Transferfunktion an.
- Stellen Sie das induzierte Gleichungssystem auf.
- Bestimmten Sie seine kleinste Lösung.

Anmerkung: Es handelt sich bei diesen Analysen (anders als bei den Analysen auf den Folien) nicht um kill-gen-Frameworks.