Thomas Haas
Prof. Dr. Roland Meyer

Theoretische Informatik 1
Übungsblatt 4

TU Braunschweig
Wintersemester 2020/21

Ausgabe: 15.12.2020 Abgabe: 15.01.2021, 17:00

Geben Sie Ihre Lösungen bis Freitag, 15.01.2021 17:00 Uhr, per E-Mail an ihren Tutor ab. Fertigen Sie dazu ihre Hausaufgaben direkt in .pdf Form an oder scannen ihre handschriftlichen Hausaufgaben ein. Geben Sie in Gruppen von **4 Personen** ab.

Hinweis: Das nötige Wissen für die letzten beiden Aufgaben 3. und 4. wird erst in der Vorlesung nach den Weihnachtsferien behandelt.

Aufgabe 1: Äquivalenzklassen [7 Punkte]

a) [4 Punkte] Betrachten Sie

$$\mathcal{L} = \left\{ a^n b^n \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\} .$$

Beweisen Sie, dass

$$\begin{aligned} [a^n]_{\equiv_{\mathcal{L}}} &= \left\{ a^n \right\} \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \\ [a^{n+1}.b]_{\equiv_{\mathcal{L}}} &= \left\{ a^{\ell+1}.b^{\ell+1-n} \;\middle|\; \ell \in \mathbb{N}, \ell \geq n \right\} \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

gilt.

Geben Sie alle weiteren Äquvialenzklassen bezüglich $\equiv_{\mathcal{L}}$ an. Bestimmen Sie insbesondere für alle $n, m \in \mathbb{N}$, in welcher Äquivalenzklasse $a^n b^m$ liegt. (Sie müssen Ihre Angaben für die weiteren Äquivalenzklassen nicht formal beweisen.)

b) [3 Punkte] Betrachten Sie die Sprache

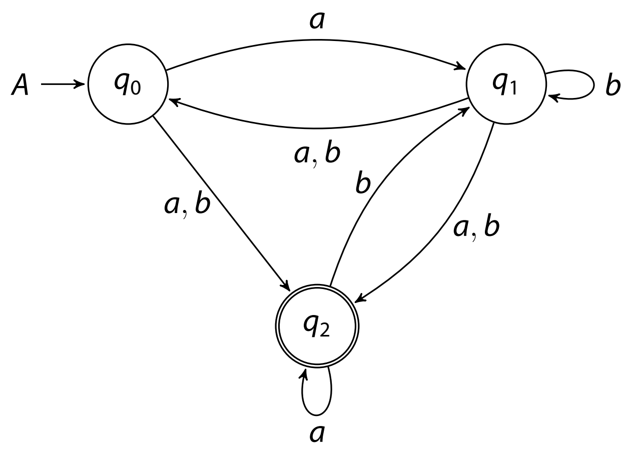
$$\mathcal{L} = \left\{ w \in \{a, b\}^* \;\middle|\; w \text{ enthält } aa \text{ oder } bb \right\}.$$

Bestimmen Sie alle Äquivalenzklassen von $\equiv_{\mathcal{L}}$.
Geben Sie den Äquvialenzklassenautomaten $A_{\mathcal{L}}$ an.

Hinweis: Mit „enthält *aa*" ist hier gemeint, dass w von der Form $w = w_1.a.a.w_2$ ist.

Aufgabe 2: Minimierung [8 Punkte]

Betrachten Sie den folgenden NFA A über $\{a, b\}$.



a) [2 Punkte] Konstruieren Sie einen zu A sprachäquivalenten DFA B unter Verwendung der Rabin-Scott-Potenzmengenkonstruktion.

   Stellen Sie sicher, dass B keine unerreichbaren Zustände enthält.

b) [3 Punkte] Bestimmen Sie auf den Zuständen von B die ~-Äquivalenzklassen unter Verwenden des Table-Fillings-Algorithmus aus der Vorlesung.

   Geben Sie an, in welcher Reihenfolge Sie die Zellen in der Tabelle markiert haben.

c) [2 Punkte] Geben Sie den minimalen DFA C für $\mathcal{L}(A)$ an. Verwenden Sie hierzu die ~-Äquivalenzklassen.

d) [1 Punkt] Vergleichen Sie die Zustandsanzahl von A, B und C.

Aufgabe 3: Pumping-Lemma [6 Punkte]

a) [3 Punkte] Betrachte $\Sigma = \{a, b\}$. Zu einem Wort w sei $|w|_a$ die Anzahl der Vorkommen von Buchstabe a in w, $|w|_b$ analog.

Beweisen Sie unter Verwendung des Pumping-Lemmas, dass die Sprache

$$\mathcal{L} = \left\{w \in \Sigma^* \;\middle|\; |w|_b + 7 > |w|_a\right\}$$

nicht regulär ist.

b) [3 Punkte] Beweisen Sie unter Verwendung des Pumping-Lemmas, dass die Sprache

$$\mathcal{L} = \left\{w \in \Sigma^* \;\middle|\; |w|_a \neq |w|_b\right\}$$

nicht regulär ist.

Hinweis zu b): Überlegen Sie sich folgendes: Für eine gegebene Zahl $n \in \mathbb{N}$, welche Zahl ist durch jede Zahl $\leqslant n$ teilbar?

Aufgabe 4: Kontextfreie Grammatiken [10 Punkte]

a) Geben Sie kontextfreie Grammatiken an, die folgende Sprachen über $\Sigma = \{a, b\}$ erzeugen:

i) [2 Punkte] $\mathcal{L}_1 = \{w \in (\Sigma \cup \{(,)\})^* \mid w$ ist korrekt geklammert.$\}$

ii) [2 Punkte] $\mathcal{L}_2 = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a = |w|_b\}$

iii) [2 Punkte] $\mathcal{L}_3 = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a \neq |w|_b\}$

b) Eine kontextfreie Grammatik G heißt **regulär**, wenn sie linkslinear oder rechtslinear ist. Rechtslinear bedeutet, dass alle Produktionsregeln auf ihrer rechten Seite höchstens ein Nichtterminal besitzen, welches (wenn es existiert) das rechteste Symbol ist. Die Regeln sind also alle von der Form $X \to w$ oder $X \to w.Y$ mit $w \in \Sigma^*$. Linkslinearität ist analog definiert.

Beweisen Sie, dass die regulären Sprachen genau die Sprachen sind, die als $\mathcal{L}(G)$ für eine rechtslineare Grammatik auftreten.

- [2 Punkte] Erklären Sie, wie man zu einem gegebenen NFA A eine rechtslineare Grammatik G mit $\mathcal{L}(G) = \mathcal{L}(A)$ konstruieren kann.
- [2 Punkte] Erklären Sie, wie man zu einer gegebenen rechtslineare Grammatik G einen NFA A mit $\mathcal{L}(G) = \mathcal{L}(A)$ konstruieren kann.

Bemerkung: Ein analoges Resultat gilt auch für linkslineare Grammatiken, deshalb spricht man in beiden Fällen von **regulären** Grammatiken.