René Maseli
Prof. Dr. Roland Meyer

Theoretische Informatik 1
Übungsblatt 5

TU Braunschweig
Wintersemester 2022/23

Ausgabe: 10.01.2023 Abgabe: 20.01.2023, 09:45

Geben Sie Ihre Lösungen bis Freitag, 20.01 09:45 Uhr, im Vips-Verzeichnis der StudIP-Veranstaltung ab. Fertigen Sie dazu ihre Hausaufgaben direkt in .pdf Form an oder scannen ihre handschriftlichen Hausaufgaben ein. Geben Sie in Gruppen von **4 Personen** ab.

Aufgabe 1: Äquivalenzklassen [10 Punkte]

Sei $\Sigma = \{a, b\}$ ein Alphabet.

a) [4 Punkte] Betrachten Sie $L = \{a^n b^m \mid n, m \in \mathbb{N}, n \geq m\}$. Beweisen Sie, dass

$$\left[a^n\right]_{\equiv_L} = \left\{a^n\right\} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$
$$\left[a^n.a.b\right]_{\equiv_L} = \left\{a^{\ell+1}.b^{\ell+1-n} \,\middle|\, \ell \in \mathbb{N}, \ell \geqslant n\right\} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

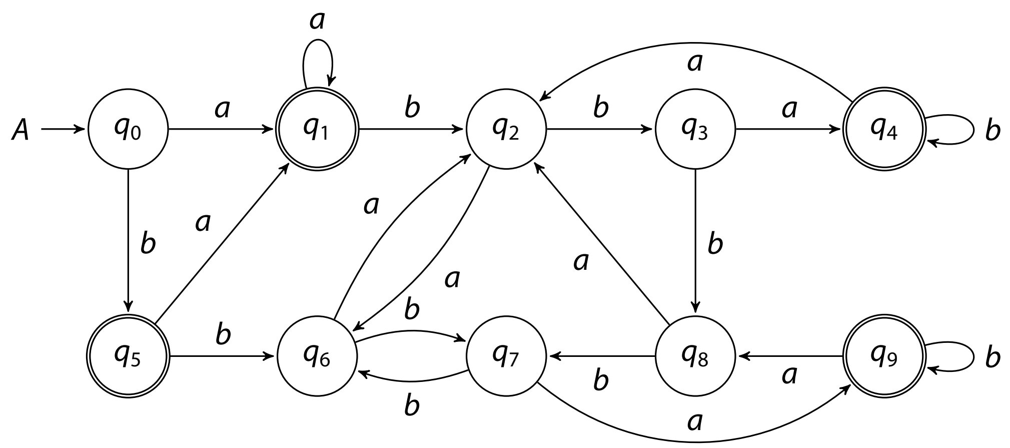
gilt.
Geben Sie alle weiteren Äquivalenzklassen bezüglich $\equiv_L$ an. Bestimmen Sie insbesondere für alle $n, m \in \mathbb{N}$, in welcher Äquivalenzklasse $a^n b^m$ liegt. (Sie müssen Ihre Angaben für die weiteren Äquivalenzklassen nicht formal beweisen.)

b) [3 Punkte] Betrachten Sie die Sprache $M = \{a, b\}^*.\{aab, abb\}.\{a, b\}^*$. Bestimmen Sie alle Äquivalenzklassen von $\equiv_M$. Geben Sie den Äquivalenzklassenautomaten A_M an.

c) [3 Punkte] Betrachten Sie die Sprache $N = \{a, b\}^*.\{a\}.\{a, b\}^* \cup (\{a, b\}.\{a, b\})^*$. Bestimmen Sie alle Äquivalenzklassen von $\equiv_N$. Geben Sie den Äquivalenzklassenautomaten A_N an.

Aufgabe 2: Minimierung [10 Punkte]

Betrachten Sie den folgenden NFA A über $\{a, b\}$.



a) [5 Punkte] Bestimmen Sie auf den Zuständen von A alle $\sim$-Äquivalenzklassen unter Verwendung des Table-Fillings-Algorithmus aus der Vorlesung. Geben Sie an, in welcher Reihenfolge Sie die Zellen in der Tabelle markiert haben.

b) [2 Punkte] Geben Sie den minimalen DFA B für $\mathcal{L}(A)$ an. Verwenden Sie hierzu die $\sim$-Äquivalenzklassen.

c) [3 Punkte] Bestimmen Sie alle Äquivalenzklassen der Nerode-Rechtskongruenz $\equiv_{\mathcal{L}(A)}$. Stellen Sie $\mathcal{L}(A)$ als Vereinigung einer bestimmten Teilmenge dieser Äquivalenzklassen dar.

Aufgabe 3: Pumping-Lemma [6 Punkte]

Sei $\Sigma = \{a, b\}$ ein Alphabet. Für jedes Wort w beschreibe $|w|_a$ die Anzahl der Vorkommen von a in w. $|w|_b$ sei analog definiert.

Beweisen Sie unter Verwendung des Pumping-Lemmas, dass die folgenden Sprachen nicht regulär sind.

a) [2 Punkte] $L_1 = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_b + 7 > |w|_a\}$

b) [4 Punkte] $L_2 = \{(ab)^n b^m w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a = n, m \geq 2\}$

Aufgabe 4: Kontextfreie Grammatiken [9 Punkte]

Sei $\Sigma = \{a, b\}$ ein Alphabet. Geben Sie kontextfreie Grammatiken G_1, G_2 und G_3 an, welche die folgenden Sprachen ableiten:

a) [1 Punkt] $\mathcal{L}(G_1) = \{a^n b^m w \mid w \in \Sigma^*, m > 2, |w|_a = n\}$.

b) [2 Punkte] $\mathcal{L}(G_2) = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a < |w|_b\}$.

c) [2 Punkte] $\mathcal{L}(G_3) = \{w \in \Sigma^* \mid \forall u, v\colon\ w = u.v \Rightarrow |v|_a \leq |v|_b\}$.

Eine kontextfreie Grammatik G heißt **regulär**, wenn sie linkslinear oder rechtslinear ist. Rechtslinear bedeutet, dass alle Produktionsregeln auf ihrer rechten Seite höchstens ein Nichtterminal besitzen, welches (wenn es existiert) das rechteste Symbol ist. Die Regeln sind also alle von der Form $X \to w$ oder $X \to w.Y$ mit $w \in \Sigma^*$. Linkslinearität ist analog definiert.

Beweisen Sie, dass die regulären Sprachen genau die Sprachen sind, die als $\mathcal{L}(G)$ für eine rechtlineare Grammatik G auftreten.

d) [2 Punkte] Erklären Sie, wie man zu einem gegebenen NFA A eine rechtslineare Grammatik G mit $\mathcal{L}(G) = \mathcal{L}(A)$ konstruieren kann.

e) [2 Punkte] Erklären Sie, wie man zu einer gegebenen rechtslineare Grammatik G einen NFA A mit $\mathcal{L}(G) = \mathcal{L}(A)$ konstruieren kann.

Bemerkung: Ein analoges Resultat gilt auch für linkslineare Grammatiken, deshalb spricht man in beiden Fällen von **regulären** Grammatiken.