Definition

Sei a ein (arithmetischer oder boolscher) Ausdruck eines while-Programms. $\text{sub}(a)$ ist die Menge der Teilausdrücke von a:

$$
\begin{aligned}
\text{sub}(a) &:= \{a\} \text{ falls } a \in \{\text{Var}, \mathbb{Z}\}\\
\text{sub}(\neg a_1) &:= \{\neg a_1\} \cup \text{sub}(a_1)\\
\text{sub}(a_1 \circ a_2) &:= \{a_1 \circ a_2\} \cup \text{sub}(a_1) \cup \text{sub}(a_2) \text{ für } \circ \in \{+, -, \cdot, <, =, \wedge, \vee\}\\
\text{expressions}(b) &:= \text{sub}(a) \text{ wobei } b \in \left\{[x := a]^l, [a]^l\right\}\\
\text{Exp} &:= \bigcup \{\text{expressions}(b) \mid b \in B\}\\
\text{sub}^{-1}(x) &:= \{e \in \text{Exp} \mid x \in \text{sub}(e)\} \text{ für } x \in \text{Exp}
\end{aligned}
$$

Beispiel

Betrachte die Syntax des folgenden while-Programms:

```
if [5x + 2 < 7y]^1 then
    [y := 2y]^2
end if
while [(5x + 2) + y < 3x + z]^3 do
    if [7y < 3x + z]^4 then
        [z := z − 1]^5
    else
        [y := 2y]^6
    end if
end while
[x := 3x]^7
```

$Var := \{x, y, z\}$	$a_1 := 5x + 2 < 7y$	$a_2 := (5x + 2) + y < 3x + z$	$a_3 := 7y < 3x + z$
$B := \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7\}$	$b_1 := [a_1]^1$	$b_2 := [y := 2y]^2$	$b_3 := [a_2]^3$
$b_4 := [a_3]^4$	$b_5 := [z := z1]^5$	$b_6 := [y := 2y]^6$	$b_7 := [x := 3x]^7$

$$\text{Exp} = \{1, 2, 3, 5, 7, x, y, z, 3x, 5x, 2y, 7y, z1, 5x + 2, 5x + 2 + y, 3x + z, a_1, a_2, a_3\}$$

1 Available Expressions

Gegeben: Ein Kontrollflussgraph in Programmrichtung

Gesucht: Für jeden Block die Menge der Ausdrücke, die in jedem Weg vor diesem Block schon mal berechnet werden musste, ohne dass zwischendurch eine Variable neu zugewiesen wird.

Betrachte das Datenflusssystem $\langle\langle B, E, F\rangle, \langle\mathcal{P}(\text{Exp}), \subseteq\rangle, i_1, TF_1\rangle$ mit $i_1 := \varnothing$ und $TF_1 := \{f_b : \mathcal{P}(\text{Exp}) \to \mathcal{P}(\text{Exp}) \mid b \in B\}$ wobei die Transferfunktionen nochmal aufgeteilt sind: $f_b(X) := (X \setminus \text{kill}_1(b)) \cup \text{gen}_1(b)$. Dabei sind $\text{kill}_1(b) \in D$ und $\text{gen}_1(b) \in D$ für jeden Block $b \in B$ in der Available Expressions so definiert:

$$\text{kill}_1(b) := \begin{cases} \text{sub}^{-1}(x) & \text{falls } b = [x := a]^l \\ \varnothing & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\text{gen}_1(b) := \text{expressions}(b) \setminus \text{kill}_1(b)$$

Beispiel
Kontrollflussgraph in Programmrichtung (forward-Analyse) und induziertes Gleichungssystem:

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r] & b_1 \arrow[r] \arrow[rr, bend left] & b_2 \arrow[r] & b_3 \arrow[r] \arrow[rrrr, bend left] & b_4 \arrow[r] \arrow[rr, bend left] & b_5 \arrow[ll, bend left] & b_6 \arrow[lll, bend left] & b_7 \end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{llll} X_1 = i_1 & X_2 = f_1(X_1) & X_3 = f_1(X_1) \cap f_2(X_2) \cap f_5(X_5) \cap f_6(X_6) & \\ X_4 = f_3(X_3) & X_5 = f_4(X_4) & X_6 = f_4(X_4) & X_7 = f_3(X_3) \end{array}$$

In Tabellen-Form werden nun sowohl die kill_1- und gen_1-Werte, die Gleichungen des induzierten Gleichungsssystems, als auch die Kleene-Iteration dargestellt.

1. In der Durchführung einer Kleene-Iteration kommt es ausschließlich auf sich ändernde Werte an. In den Zellen werden die Elemente aufgelistet, die in dieser Iteration aus der Wertemenge des Blocks **entfernt** werden (must-Analyse).

2. Werte die bereits vorher aus einem anderen Grund entfernt wurden, werden mit **Klammern** markiert. Falls eine Zelle nur eingeklammerte Werte enthält, hat sich der entsprechende Wertemenge des Blocks in dieser Iteration nicht verändert. (Dies dient nur zur Veranschaulichung. In den Hausaufgaben wird hierauf keinen Wert gelegt!)

3. Es **bleiben Zellen leer**, falls sich in keiner Zelle eines Vorgänger-Blocks (forward-Analyse) der letzten Iteration keine Elemente entfernt werden.

4. Die Pfeile markieren, wo Änderungen aus einer vorigen Iteration zu neuen Berechnungen in der Nächsten führen. (Ebenfalls nicht in Hausaufgaben gefordert.)

b	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
$\mathrm{kill}_1(b)$	$\varnothing$	$\mathrm{sub}^{-1}(y)$ $= \{y, 2y, 7y,$ $5x+2+y,$ $a_1, a_2, a_3\}$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\mathrm{sub}^{-1}(z)$ $= \{z, z-1,$ $3x+z,$ $a_2, a_3\}$	$\mathrm{sub}^{-1}(y)$ $= \{y, 2y, 7y,$ $5x+2+y,$ $a_1, a_2, a_3\}$	$\mathrm{sub}^{-1}(x)$ $= \{x, 3x, 3x+z,$ $5x, 5x+2,$ $5x+2+y,$ $a_1, a_2, a_3\}$
$\mathrm{gen}_1(b)$	$\mathrm{sub}(a_1)$ $= \{2, 5,$ $7, 5x,$ $5x+2,$ $7y, a_1\}$	$\mathrm{sub}(2y)$ $\setminus \mathrm{sub}^{-1}(y)$ $= \{2\}$	$\mathrm{sub}(a_2)$ $= \{2, 3, 5,$ $x, y, z, 5x,$ $5x+2, a_2,$ $5x+2+y,$ $3x, 3x+z\}$	$\mathrm{sub}(a_3)$ $= \{3, 7,$ $x, y, z,$ $7y, 3x,$ $3x+z, a_3\}$	$\mathrm{sub}(z-1)$ $\setminus \mathrm{sub}^{-1}(z)$ $= \{1\}$	$\mathrm{sub}(2y)$ $\setminus \mathrm{sub}^{-1}(y)$ $= \{2\}$	$\mathrm{sub}(3x)$ $\setminus \mathrm{sub}^{-1}(x)$ $= \{3\}$
X_b	i_1	$f_1(X_{b_1})$	$f_1(X_{b_1})$ $\cup f_2(X_{b_2})$ $\cup f_5(X_{b_5})$ $\cup f_6(X_{b_6})$	$f_3(X_{b_3})$	$f_4(X_{b_4})$	$f_4(X_{b_4})$	$f_3(X_{b_3})$

$F_1(\top)$	Exp		$y, z, 2y, 7y,$ $5x+2+y,$ $z-1, 3x+z,$ a_1, a_2, a_3				
$F_1^2(\top)$		$1, 2, 3, z,$ $3x+z, z-1,$ $5x+2+y,$ $2y, 3x, a_2, a_3$	$1, 2, 3, (z),$ $3x, (3x+z),$ $(5x+2+y),$ $(a_2), (a_3)$	$7y, z-1,$ a_1, a_3			$7y, z-1,$ a_1, a_3
$F_1^3(\top)$			$(1), (3x+z),$ $(5x+2+y)$ $(z), (z-1)$ $(a_2), (a_3)$	1	$z-1, a_1$	$z-1, a_1$	1
$F_1^4(\top)$			$(z-1), (a_1)$		1	1	
$F_1^5(\top)$			(1)				

Die Iteration stabilisiert sich nach 4 Schritten. Der Fixpunkt $\mathrm{gfp}(F_1) = F_1^4(\top)$ sieht wiefolgt aus:

$$\mathrm{gfp}(F_1)(b_1) = \varnothing$$

$$\mathrm{gfp}(F_1)(b_2) = \{2, 5, 7, x, y, 5x, 5x+2, 7y, a_1\} \quad = \mathrm{sub}(a_1)$$

$$\mathrm{gfp}(F_1)(b_3) = \{2, 5, 7, x, 5x, 5x+2\} \quad = \mathrm{sub}(5x+2) \cup \{7\}$$

$$\mathrm{gfp}(F_1)(b_4) = \{2, 3, 5, 7, x, y, 5x, 5x+2, 5x+2+y, 3x, 3x+z, a_2\} \quad = \mathrm{sub}(a_2) \cup \{7\}$$

$$\mathrm{gfp}(F_1)(b_5) = \{2, 3, 5, 7, x, y, 5x, 5x+2, 5x+2+y, 3x, 3x+z, 7y, a_2, a_3\} \quad = \mathrm{sub}(a_2) \cup \mathrm{sub}(a_3)$$

$$\mathrm{gfp}(F_1)(b_6) = \{2, 3, 5, 7, x, y, 5x, 5x+2, 5x+2+y, 3x, 3x+z, 7y, a_2, a_3\} \quad = \mathrm{sub}(a_2) \cup \mathrm{sub}(a_3)$$

$$\mathrm{gfp}(F_1)(b_7) = \{2, 3, 5, 7, x, y, 5x, 5x+2, 5x+2+y, 3x, 3x+z, a_2\} \quad = \mathrm{sub}(a_2) \cup \{7\}$$

2 Very Busy Expressions

Gegeben: Ein Kontrollflussgraph gegen Programmrichtung

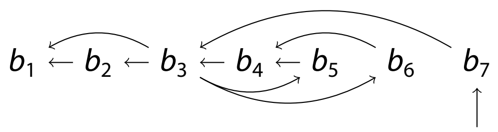
Frage: Für jeden Block die Menge der Ausdrücke, die in jedem Weg nach diesem Block letztendlich berechnet werden muss, ohne dass zwischendurch eine Variable neu zugewiesen wird.

Betrachte das Datenflusssystem $\langle\langle B, E, F\rangle, \langle\mathcal{P}(\mathrm{Exp}), \subseteq\rangle, i_2, TF_2\rangle$ mit $i_2 := \varnothing$ und $TF_2 := \{g_b : \mathcal{P}(\mathrm{Exp}) \to \mathcal{P}(\mathrm{Exp}) \mid b \in B\}$ sowie $g_b(X) := (X \setminus \mathrm{kill}_2(b)) \cup \mathrm{gen}_2(b)$. Wie vorhin werden wir zu der induzierten monotonen Funktion F_2 den **größten Fixpunkt** berechnen (must-Analyse).

$$\mathrm{kill}_2(b) := \begin{cases} \mathrm{sub}^{-1}(x) & \text{falls } b = [x := a]^l \\ \varnothing & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\mathrm{gen}_2(b) := \mathrm{expressions}(b) \text{ (Achtung: diesmal ohne } \mathrm{kill}_2(b) \text{ abzuziehen)}$$

Beispiel
Kontrollflussgraph entgegen Programmrichtung (backward-Analyse):



Das induzierte Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
X_1 &= g_2(X_2) \cap g_3(X_3) \\
X_2 &= g_3(X_3) \\
X_3 &= g_4(X_4) \cap g_7(X_7) \\
X_4 &= g_5(X_5) \cap g_6(X_6) \\
X_5 &= g_3(X_3) \\
X_6 &= g_3(X_3) \\
X_7 &= i_2
\end{aligned}$$

In Tabellen-Form werden nun sowohl die kill_2- und gen_2-Werte, die Gleichungen des induzierten Gleichungsssystems, als auch die Kleene-Iteration dargestellt.

Wieder betrachten wir nur die sich ändernden Werte. In den Zellen werden die Elemente aufgelistet, die in dieser Iteration aus der Wertemenge des Blocks entfernt werden (must-Analyse). Leere Zellen sind genau die, bei denen keine Zelle eines Nachfolger-Blocks (backward-Analyse) in der letzten Iteration verändert wurde.

b	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
$\mathrm{kill}_2(b)$	$\varnothing$	$\mathrm{sub}^{-1}(y)$ $= \{y, 2y, 7y,$ $5x + 2 + y,$ $a_1, a_2, a_3\}$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\mathrm{sub}^{-1}(z)$ $= \{z, z-1,$ $3x + z,$ $a_2, a_3\}$	$\mathrm{sub}^{-1}(y)$ $= \{y, 2y, 7y,$ $5x + 2 + y,$ $a_1, a_2, a_3\}$	$\mathrm{sub}^{-1}(x)$ $= \{x, 3x,$ $3x + z,$ $5x, 5x + 2,$ $5x + 2 + y,$ $a_1, a_2, a_3\}$
$\mathrm{gen}_2(b)$	$\mathrm{sub}(a_1)$ $= \{2, 5,$ $7, 5x,$ $5x + 2,$ $7y, a_1\}$	$\mathrm{sub}(2y)$ $= \{2, y, 2y\}$	$\mathrm{sub}(a_2)$ $= \{2, 3, 5,$ $x, y, z, 5x,$ $5x + 2, a_2,$ $5x + 2 + y,$ $3x, 3x + z\}$	$\mathrm{sub}(a_3)$ $= \{3, 7,$ $x, y, z,$ $7y, 3x,$ $3x + z, a_3\}$	$\mathrm{sub}(z-1)$ $= \{1, z,$ $z - 1\}$	$\mathrm{sub}(2y)$ $= \{2, y, 2y\}$	$\mathrm{sub}(3x)$ $= \{3, x, 3x\}$
$X_b =$	$g_2(X_2)$ $\cap\, g_3(X_3)$	$g_3(X_3)$	$g_4(X_4)$ $\cap\, g_7(X_7)$	$g_5(X_5)$ $\cap\, g_6(X_6)$	$g_3(X_3)$	$g_3(X_3)$	i_2

$F_2(\top)$	$7y,$ $5x + 2 + y,$ a_1, a_2, a_3		$5x, 5x + 2,$ $3x + z,$ $5x + 2 + y,$ a_1, a_2, a_3	$7y,$ $3x + z,$ $5x + 2 + y,$ a_1, a_2, a_3			Exp
$F_2^2(\top)$	$z - 1,$ $(a_1), (a_3)$	$z - 1,$ a_1, a_3	$1, 2, 5, 7, y,$ $2y, 7y, z - 1,$ $(5x + 2 + y)$ $z, (3x + z)$		a_1, a_3	a_1, a_3	
$F_2^3(\top)$	$1, 7, 2y,$ $(7y), (z - 1),$ $(a_1), (a_3)$	$1, 7,$ $2y, 7y$		$z - 1,$ $(a_1), (a_3)$	$1, 7, 2y,$ $7y, z - 1$	$1, 7, 2y,$ $7y, z - 1$	
$F_2^4(\top)$	$(1), (7)$		$(z - 1)$	$1, 7, 2y,$ $(7y), (z - 1)$			
$F_2^5(\top)$			$(1), (7), (2y)$				

Der Fixpunkt wird in der 4. Iteration erreicht, da in der 5. Iteration keine Änderungen verzeichnet wurden. Der Fixpunkt $\mathrm{gfp}(F_2) = F_2^4(\top)$ sieht wiefolgt aus:

$$\mathrm{gfp}(F_2)(b_1) = \{2, 3, 5, x\} \qquad = \mathrm{sub}(5x + 2) \cup \mathrm{sub}(3x)$$

$$\mathrm{gfp}(F_2)(b_2) = \{2, 3, 5, x, y, z, 3x, 5x, 5x + 2, 5x + 2 + y, 3x + z, a_2\} \qquad = \mathrm{sub}(a_2)$$

$$\mathrm{gfp}(F_2)(b_3) = \{3, x, 3x\} \qquad = \mathrm{sub}(3x)$$

$$\mathrm{gfp}(F_2)(b_4) = \{3, x, 3x\} \qquad = \mathrm{sub}(3x)$$

$$\mathrm{gfp}(F_2)(b_5) = \{2, 3, 5, x, y, z, 3x, 5x, 5x + 2, 5x + 2 + y, 3x + z, a_2\} \qquad = \mathrm{sub}(a_2)$$

$$\mathrm{gfp}(F_2)(b_6) = \{2, 3, 5, x, y, z, 3x, 5x, 5x + 2, 5x + 2 + y, 3x + z, a_2\} \qquad = \mathrm{sub}(a_2)$$

$$\mathrm{gfp}(F_2)(b_7) = \varnothing$$