Theoretische Informatik 1
Große Übung 3

René Maseli
Prof. Dr. Roland Meyer

TU Braunschweig
Wintersemester 2022/23

Ausgabe: Abgabe:

Theorem: Erweitertes Lemma von Arden.
Es seien $L, U, V \subseteq \Sigma^*$ mit $\varepsilon \in U$.

Es gilt $L = U.L \cup V$ genau dann, wenn es ein $W \subseteq \Sigma^*$ gibt mit $V \subseteq W$ und $L = U^*.W$.

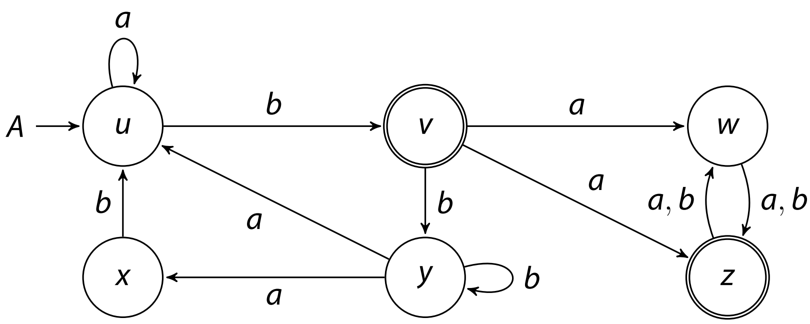
Beweis:
Zunächst die Implikation von links nach rechts. Seien $L, U, V \subseteq \Sigma^*$ mit $\varepsilon \in U$ und $L = U.L \cup V$. L ist ein passender Kandidat für W, denn es gilt $V \subseteq U.L \cup V = L$.

$$
\begin{aligned}
L &= U.L \cup V && \text{nach Annahme} \\
&= U.L && V \subseteq \{\varepsilon\}.L \subseteq U.L \\
&= (U \setminus \{\varepsilon\}).L \cup L && \text{Distributivität} \\
&= (U \setminus \{\varepsilon\})^*.L && \text{Arden's Lemma} \\
&= U^*.L && \varepsilon \in U^*
\end{aligned}
$$

Nun zeigen wir die Gegenrichtung. Seien $L, U, V, W \subseteq \Sigma^*$ mit $\varepsilon \in U$, $V \subseteq W$ und $L = U^*.W$.

$$
\begin{aligned}
U.L \cup V &= U.U^*.W \cup V && \text{nach Annahme } L = U^*.W \\
&= U^+.W \cup V && U.U^* = U^+ \\
&= U^*.W \cup V && \text{mit } \varepsilon \in U \text{ gilt } U^+ = U^* \\
&= U^*.W && V \subseteq W = \{\varepsilon\}.W \subseteq U^*.W \\
&= L && \text{nach Annahme}
\end{aligned}
$$

Mit beiden Implikationen gilt also die Äquivalenz. □



Berechnung eines Regulären Ausdrucks

Das Gleichungssystem lautet:

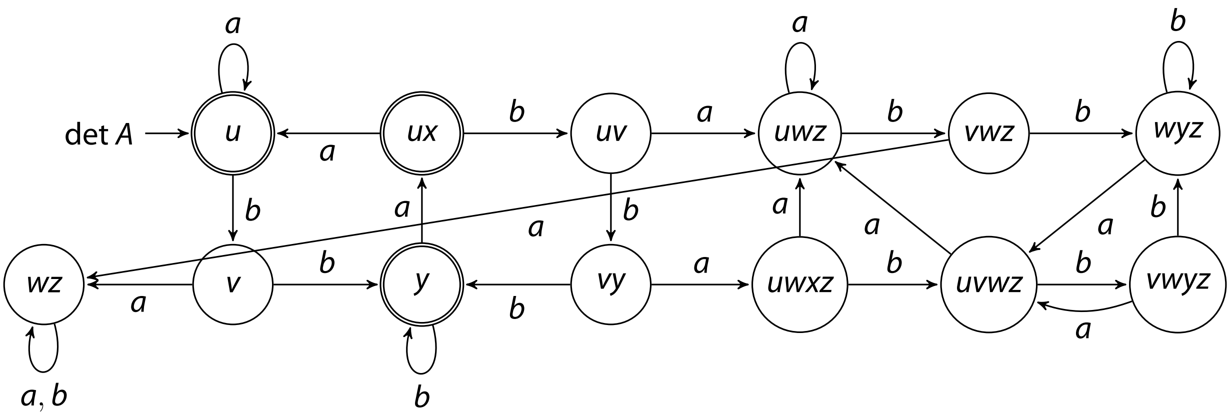
$$
\begin{aligned}
U &= \{a\}.U \cup \{b\}.V && (1) & V &= \{a\}.W \cup \{a\}.Z \cup \{\varepsilon\} && (2) & W &= \{a,b\}.Z && (3)\\
X &= \{b\}.U && (4) & Y &= \{a\}.U \cup \{a\}.X \cup \{b\}.Y && (5) & Z &= \{a,b\}.W \cup \{\varepsilon\} && (6)
\end{aligned}
$$

Es lässt sich auf verschiedenen Weisen lösen. Insbesondere benötigt man höchstens sooft Arden’s Lemma, wie es Kreise im Graphen gibt. Allerdings können überschneidende Kreise gleichzeitig vereinfacht werden.

$$
\begin{aligned}
Z &= \{\varepsilon\} \cup \{a,b\}.\{a,b\}.Z && \text{Einfügen von (3) in (6)}\\
&= (\{a,b\}.\{a,b\})^* && \text{Arden's Lemma}\\
&= \{aa,ab,ba,bb\}^* \qquad (7) &&\\
W &= \{a,b\}.\{aa,ab,ba,bb\}^* && \text{Einfügen von (7) in (3)}\\
V &= \{b\}.Y \cup \{a\}.\{a,b\}.Z \cup \{a\}.Z \cup \{\varepsilon\} && \text{Einfügen (3) in (2)}\\
&= \{b\}.Y \cup (\{a\}.\{a,b\} \cup \{\varepsilon\}).Z \cup \{\varepsilon\} && \text{Distributivität}\\
&= \{b\}.Y \cup \{a,aa,ab\}.Z \cup \{\varepsilon\} &&\\
&= \{b\}.Y \cup \{a,aa,ab\}.\{aa,ab,ba,bb\}^* && \text{Einfügen von (8)}\\
Y &= b^*aU \cup b^*aX && \text{Arden's Lemma über (5)}
\end{aligned}
$$

Potenzmengenkonstruktion nach Rabin & Scott

Tipp: Bevorzugt zuerst kleine Teilmengen vor Größeren.



Definition
Seien Σ ein Alphabet und $v, w \in \Sigma^*$. Der Shuffle $v \sqcup\!\sqcup\, w$ ist die Menge der Worte, die durch eine beliebige abwechslung der Buchstaben von v und w hervorgehen. Dabei soll die Reihenfolge der Buchstaben aus demselben Wort erhalten bleiben.

$$v \sqcup\!\sqcup\, w := \begin{cases} a.(x \sqcup\!\sqcup\, w) \cup b(v \sqcup\!\sqcup\, y) & \text{falls } v = a.x \text{ und } w = b.y \\ \{v.w\} & \text{falls } v = \varepsilon \text{ oder } w = \varepsilon \end{cases}$$

Der Shuffle zweier Sprachen $L \subseteq \Sigma^*$ und $M \subseteq \Sigma^*$ ist die Sprache

$$L \sqcup\!\sqcup\, M := \bigcup \{v \sqcup\!\sqcup\, w \mid v \in L \text{ und } w \in M\}$$

Beispiel
$aab \sqcup\!\sqcup\, ba = \{\underline{aab}ba, \underline{aa}b\underline{b}a, \underline{aa}ba\underline{b}, \underline{a}b\underline{ab}a, \underline{a}b\underline{a}a\underline{b}, \underline{a}ba\underline{ab}, b\underline{aab}a, b\underline{aa}a\underline{b}, b\underline{a}a\underline{ab}, ba\underline{aab}\}$

Beispiele für reguläre Sprachen sind

$$(aa)^* \sqcup\!\sqcup\, b^* = b^*\left(ab^*ab^*\right)^* \qquad (ab)^* \sqcup\!\sqcup\, (ba)^* = (ab \cup ba)^*$$
$$a^* \sqcup\!\sqcup\, b^* = \{a, b\}^* \qquad a \sqcup\!\sqcup\, a^*.b.a^* = a^*.(ab \cup ba).a^*$$

Proposition
Falls L und M regulär sind, dann ist es auch L.

Versuch 1
Veranschaulicht, wie Beweise mittels NFA-Konstruktion strukturiert sind. Der Beweis weist allerdings einige Lücken auf.

Seien $A = \langle Q_A, i_A, \to_A, F_A\rangle$ und $B = \langle Q_B, i_B, \to_B, F_B\rangle$ NFAs auf dem Alphabet Σ. Wir konstruieren einen neuen NFA $A \sqcup\!\sqcup\, B = \langle Q, i, \to, F\rangle$ mit $\mathcal{L}(A \sqcup\!\sqcup\, B) = \mathcal{L}(A) \sqcup\!\sqcup\, \mathcal{L}(B)$.

$$Q = Q_A \times Q_B \qquad i = \langle i_A, i_B\rangle \qquad F = F_A \times F_B$$

$$\langle p_A, p_B\rangle \xrightarrow{s} \langle q_A, q_B\rangle \iff \left(p_A \xrightarrow{s}_A p_A \wedge p_B = q_B\right) \vee \left(p_A = q_A \wedge p_B \xrightarrow{s}_B q_B\right)$$

Nun gilt es, die Korrektheit dieser Konstruktion zu zeigen.

Sei $x = x_1 \ldots x_k \in \mathcal{L}(A \sqcup\!\sqcup\, B)$. Dann gibt es einen akzeptierenden Lauf $i \xrightarrow{x_1} \langle a_1, b_1\rangle \xrightarrow{x_2} \cdots \xrightarrow{x_k} \langle a_k, b_k\rangle \in F$. Dabei simuliert gemäß der obigen Konstruktion jede dieser Transitionen entweder eine A-Transition oder eine B-Transition, während der simulierte Zustand des jeweils anderen Automaten unverändert bleibt. Die Aneinanderreihung der A-Transitionen liefert nun ein *Subwort* $v \in \Sigma^*$ mit einen akzeptierenden Lauf $i_A \xrightarrow{v}{}^{*}_{A} a_k \in F_A$. Analog erhalten wir über den B-Transitionen das andere Subwort $w \in \Sigma^*$ und einen akzeptierenden Lauf $i_B \xrightarrow{w}_B^* b_k \in F_B$. [...] Jetzt beobachten wir $x \in v \sqcup\!\sqcup\, w \subseteq \mathcal{L}(A) \sqcup\!\sqcup\, \mathcal{L}(B)$.

Sei $x = x_1 \dots x_k \in \mathcal{L}(A) \sqcup\!\sqcup\, \mathcal{L}(B)$, insbesondere $x \in v \sqcup\!\sqcup\, w$ mit $v = v_1 \dots v_n \in \mathcal{L}(A)$ und $w = w_1 \dots w_m \in \mathcal{L}(B)$ mit $n + m = k$. Dann gibt es akzeptierenden Läufe $i_A \xrightarrow{v_1}_A a_1 \xrightarrow{v_2}_A \cdots \xrightarrow{v_n}_A a_n \in F_A$ und $i_B \xrightarrow{w_1}_B b_1 \xrightarrow{w_2}_B \dots \xrightarrow{w_m} b_m \in F_B$. [...] Nun existiert der Lauf $i \xrightarrow{x_1} q_1 \xrightarrow{x_2} \dots \xrightarrow{x_k} q_k \in F$. Also wird x von $A \sqcup\!\sqcup\, B$ akzeptiert.

Versuch 2

Wird nächstes Mal fortgesetzt.