Abschlussklausur Theoretische Informatik I
30. August 2017

Prof. Dr. Roland Meyer — TU Braunschweig
Peter Chini, Sebastian Muskalla — Sommersemester 2017

1. **Bitte ausfüllen:**

   Vorname:

   Nachname:

   Matrikelnummer:

   Unterschrift:

2. Achten Sie darauf, dass Ihre Klausur vollständig ist und getackert bleibt (14 Blätter)!
3. Benutzen Sie **nur das an dieses Blatt angeheftete Papier**. Bei Bedarf können wir weitere Leerblätter austeilen. Wenn der Platz auf der Vorderseite des jeweiligen Aufgabenblatts nicht ausreicht, **machen Sie kenntlich**, wo Sie die Bearbeitung der Aufgabe fortsetzen.
4. Als Hilfsmittel ist **ausschließlich** ein zweiseitig **handgeschriebenes DIN A4-Blatt** erlaubt. Elektronische Geräte müssen während der Klausur ausgeschaltet bleiben. Täuschungsversuche werden mit 0 Punkten gewertet und dem Prüfungsamt gemeldet.
5. Schreiben Sie leserlich und bearbeiten Sie Ihre Klausur **nicht mit Bleistift** und auch **nicht in roter oder grüner Farbe!**
6. Wir werden das Deckblatt während der Klausur auf korrekte Daten überprüfen. Legen Sie dazu Ihren **Studierendenausweis** und einen **amtlichen Lichtbildausweis** bereit.
7. Wir werden den Termin für die Klausureinsicht auf unserer Website bekanntgeben: `tcs.cs.tu-bs.de/teaching/ThInfIKlausur_SS_2017.html` .
8. Die **Bearbeitungszeit** beträgt **120 Minuten**.
9. Mit **40 Punkten** ist die Klausur **sicher bestanden.**

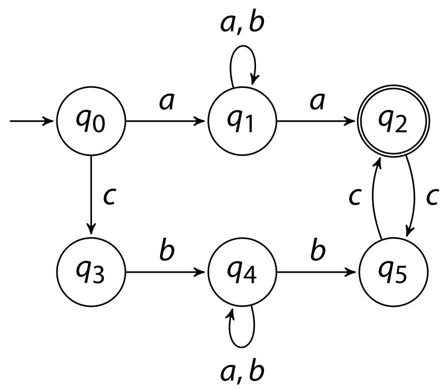
Punkteverteilung: (wird von den Korrektoren ausgefüllt)

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
Max.	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	**100**
Punkte											

1. Determinisierung

$\boxed{\text{10 Punkte}}$

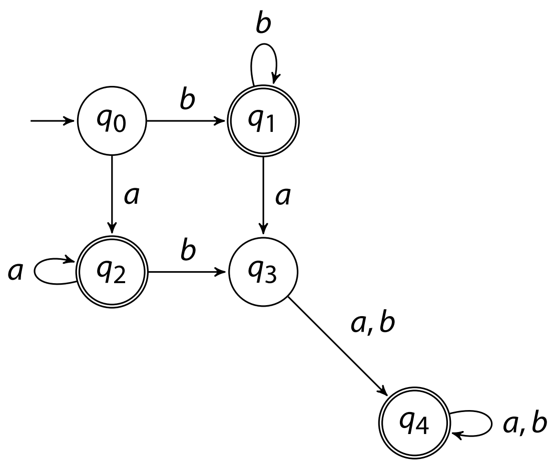
Determinisieren Sie folgenden NFA über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$ unter Verwendung der Potenzmengen-Konstruktion:



2. Ardens Lemma

$\boxed{\text{10 Punkte}}$

Gegeben sei folgender NFA A über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$:



Geben Sie das zu A gehörige Gleichungssystem an und lösen Sie dieses unter Verwendung von Ardens Lemma.

3. Automatenkonstruktion

$\boxed{\text{10 Punkte}}$

Es sei $K \in \mathbb{N}$ eine gerade Zahl und Σ das Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Konstruieren Sie einen NFA A_K, der die folgende Sprache akzeptiert:

$$L = \left(\left(a^K\right)^* \cup \left((ab)^{K/2}\right)^*\right)^K.$$

Hinweis: A_K darf ε-Transitionen enthalten.

4. CYK-Algorithmus

10 Punkte

Gegeben ist die kontextfreie Grammatik $G = (\{S, A, B, C\}, \{a, b\}, P, S)$ mit P:

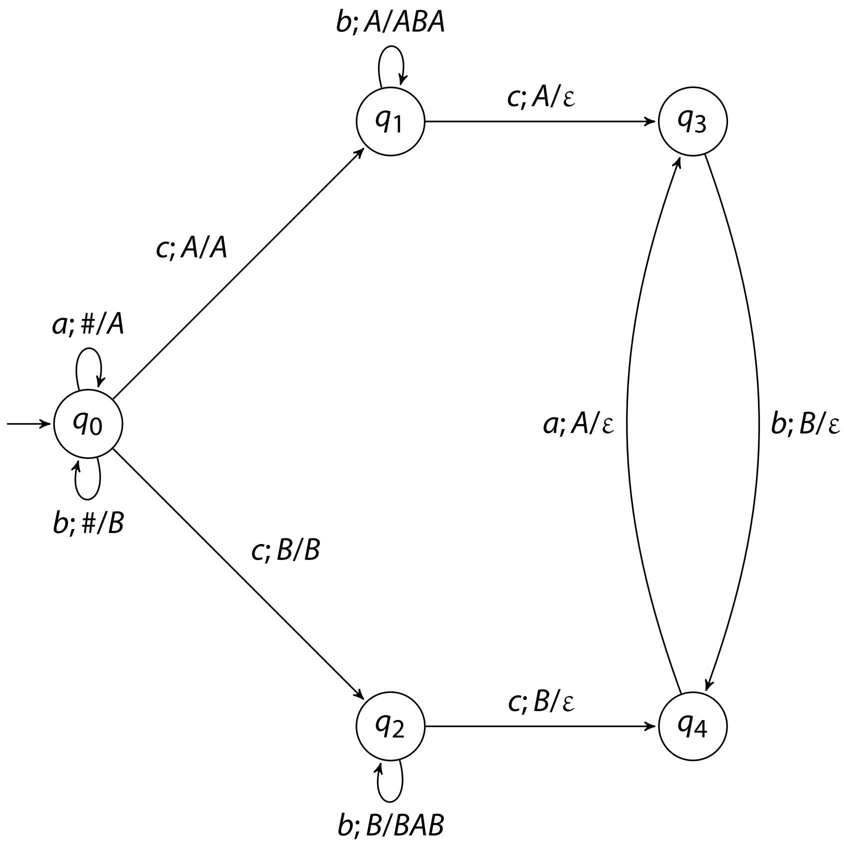
$$
\begin{aligned}
S &\longrightarrow AB \mid AC, \\
A &\longrightarrow AA \mid BB \mid a, \\
B &\longrightarrow AA \mid b, \\
C &\longrightarrow AA \mid CC.
\end{aligned}
$$

Entscheiden Sie mit Hilfe des Cocke–Younger–Kasami-Algorithmus, ob das Wort $w = aabba$ von G erzeugt wird.

5. Tripelkonstruktion

10 Punkte

Gegeben sei der folgende PDA P über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$ mit initialem Stack-Symbol #. Der PDA P akzeptiert mit leeren Stack.



Benutzen Sie die Tripelkonstruktion aus der Vorlesung, um eine kontextfreie Grammatik G mit $L(G) = L(P)$ zu konstruieren.

6. Pumping-Lemma

10 Punkte

Es sei $\Sigma = \{a, b, c\}$ und $w \in \Sigma^*$. Wir bezeichnen mit $|w|_a$ (analog $|w|_b$ und $|w|_c$) die Anzahl der a's in w.

Zeigen Sie mit Hilfe des Pumping-Lemmas, dass die Sprache

$$L = \{ w \in \Sigma^* \mid |w|_a + |w|_b = |w|_c \}$$

nicht regulär ist.

7. Zustandswechselsprachen $\boxed{4 + 6 = 10 \text{ Punkte}}$

Es sei A ein NFA mit Zustandsmenge Q über dem Alphabet Σ und $(q, q') \in Q^2$ ein Zustandspaar. Die Sprache $L(q, q') = \left\{ w \in \Sigma^* \;\middle|\; q \xrightarrow{w} q' \text{ in } A \right\}$ beinhaltet alle Wörter aus Σ^*, die im Automaten A einen Zustandswechsel von q nach q' herbeiführen.

a) Es sei $(q_1, q_2)(q_3, q_4) \ldots (q_{n\text{-}1}, q_n) \in (Q^2)^*$ eine Sequenz von Zustandspaaren. Skizzieren Sie einen NFA für die Sprache $L(q_1, q_2).L(q_3, q_4) \ldots L(q_{n\text{-}1}, q_n)$.

b) Angenommen für jeden Zustand $q \in Q$ gilt $L(q, q) = \varepsilon$. Zeigen Sie, dass $L(A)$ endlich ist.

8. Fragen zu Sprachen

$\boxed{2+2+3+3=10 \text{ Punkte}}$

Beantworten Sie die folgenden Fragen. Begründen Sie ihre Antwort mit einem kurzen Beweis oder einem Gegenbeispiel.

a) Gibt es eine reguläre Sprache, deren Komplement kontextfrei ist?

b) Es sei L eine nicht kontextfreie Sprache. Ist $\overline{L}$ regulär?

c) Sei L_1 kontextfrei und L_2 regulär. Ist der Schnitt $L_1 \cap L_2$ regulär?

d) Sei L' eine kontextfreie Sprache, die ε nicht enthält und L eine Sprache mit $L = L'.L \cup \{w\}$, wobei w ein Wort ist. Ist L kontextfrei?

9. Parikh-Bild

$\boxed{4+6=10 \text{ Punkte}}$

Es sei $\Sigma = \{a_1, \ldots, a_n\}$ ein endliches Alphabet und $w \in \Sigma^*$. Wir bezeichnen mit $|w|_{a_i}$ die Anzahl des Buchstaben a_i in w. Beispielsweise ist $|abbaa|_a = 3$ und $|abbaa|_b = 2$ über dem Alphabet $\{a, b\}$.

Das **Parikh-Bild** $\psi(w)$ ist ein Vektor in $\mathbb{N}^n$, der die Anzahlen aller Buchstaben in w auflistet. Es ist definiert durch:

$$\psi(w) = (|w|_{a_1}, |w|_{a_2}, \ldots, |w|_{a_n}) \in \mathbb{N}^n.$$

Zum Beispiel ist $\psi(abbaa) = (3, 2)$ über dem Alphabet $\{a, b\}$.

Sei nun $L \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache. Das Parikh-Bild von L ist die Menge der Parikh-Bilder der Worte in L:

$$\psi(L) = \{\psi(w) \mid w \in L\} \subseteq \mathbb{N}^n.$$

Beispielsweise ist $\psi(\{abbaa, aaab, aaabb\}) = \{(3, 2), (3, 1)\}$, da $\psi(abbaa) = \psi(aaabb)$.

a) Sei $\Gamma = \{a, b, c\}$. Konstruieren Sie einen NFA A über Γ, sodass $\psi(L(A)) = \{(n, 2n, 3n) \mid n \in \mathbb{N}\}$.

b) Sei $\Sigma = \{a_1, \ldots, a_n\}$ ein beliebiges endliches Alphabet und $c, v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{N}^n$ Vektoren. Wir betrachten die Menge $P = \{c + n_1 v_1 + \cdots + n_k v_k \mid n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N}^n$. Skizzieren Sie einen NFA A über Σ, sodass $\psi(L(A)) = P$.

10. Piece-Sprachen

1+3+6 = 10 Punkte

Sei Σ ein endliches Alphabet. Eine Sprache der Form $L = \Sigma^*.a_1.\Sigma^*.a_2.\Sigma^* \dots \Sigma^*.a_n.\Sigma^*$ mit $a_1, \dots, a_n \in \Sigma$ heißt **Piece-Sprache**. Das Ziel dieser Aufgabe ist es, den Schnitt zweier Piece-Sprachen mit Hilfe von endlich vielen Piece-Sprachen zu beschreiben.

Seien $\Gamma, \Delta \subseteq \Sigma$ Teilmengen mit $\Gamma \cap \Delta = \varnothing$. Gegeben sind $L_1 = \Sigma^*.a_1.\Sigma^* \dots \Sigma^*.a_n.\Sigma^*$ und $L_2 = \Sigma^*.b_1.\Sigma^* \dots \Sigma^*.b_m.\Sigma^*$, zwei Piece-Sprachen, mit $a_1, \dots, a_n \in \Gamma$ und $b_1, \dots, b_m \in \Delta$.

a) Konstruieren Sie NFAs A_1 und A_2 mit $L(A_i) = L_i$, $i = 1, 2$.

b) Skizzieren Sie einen NFA $A_1 \times A_2$ über dem gemeinsamen Alphabet Σ mit

$$L(A_1 \times A_2) = L_1 \cap L_2.$$

Sei nun v ein Wort in $(\Gamma \cup \Delta)^*$. Die **Projektion** von v auf Γ ist das Wort $\pi_\Gamma(v) \in \Gamma^*$, welches entsteht, wenn man in v die Buchstaben aus Δ herausstreicht. Analog ist $\pi_\Delta(v)$ definiert. Zum Beispiel ist $\pi_{\{a,b\}}(acdbb) = abb$.

Es seien $w \in \Gamma^*$ und $u \in \Delta^*$ Wörter. Der **Shuffle** von w und u ist die Sprache:

$$w \amalg u = \left\{ v \in (\Gamma \cup \Delta)^* \;\middle|\; \pi_\Gamma(v) = w \text{ und } \pi_\Delta(v) = u \right\}.$$

Der Shuffle beinhaltet also alle Wörter, die sich durch Verschachtelung von w und u ergeben. Zum Beispiel ist $ab \amalg cd = \left\{abcd, acdb, acbd, cdab, cabd, cadb\right\}$.

c) Beweisen Sie nun, dass gilt:

$$L_1 \cap L_2 = \bigcup_{\sigma \in a_1 \dots a_n \amalg b_1 \dots b_m} \Sigma^*.\sigma_1.\Sigma^* \dots \Sigma^*.\sigma_{n+m}.\Sigma^*.$$

Achten Sie darauf, dass $a_1, \dots, a_n \in \Gamma$, $b_1, \dots, b_m \in \Delta$ und Γ und Δ disjunkt sind.