Prof. Dr. Roland Meyer
René Maseli

Probeklausur
Theoretische Informatik 1
30. Januar 2023

TU Braunschweig
Wintersemester 2022/2023

1. **Bitte am Anfang ausfüllen:**

   Vorname:

   Nachname:

   Matrikelnummer:

   Unterschrift:

2. Die Nummer Ihrer Klausur ist `# 1.` Bitte merken Sie sich die Nummer. Wir werden die Klausurergebnisse anonymisiert unter Verwendung der Nummern bekanntgeben.
3. Achten Sie darauf, dass Ihre Klausur **vollständig ist** und **getackert bleibt** (11 Blätter).
4. Benutzen Sie **nur das an dieses Blatt angeheftete Papier**. Bei Bedarf können wir weitere Leerblätter austeilen. Wenn der Platz auf der Vorderseite des jeweiligen Aufgabenblatts nicht ausreicht, **machen Sie kenntlich**, wo Sie die Bearbeitung der Aufgabe fortsetzen.
5. Als Hilfsmittel sind **ausschließlich** Sprachwörterbücher sowie ein beidseitig **handschriftlich beschriebenes DIN A4-Blatt** erlaubt. Elektronische Geräte müssen während der Klausur ausgeschaltet bleiben. Täuschungsversuche werden als nicht bestanden gewertet und dem Prüfungsamt gemeldet.
6. Schreiben Sie leserlich und bearbeiten Sie Ihre Klausur mit einem dokumentenechten Stift (**nicht mit Bleistift**, kein Tipp-Ex, kein Tintenkiller) und **nicht in roter oder grüner Farbe**.
7. Wir werden das Deckblatt während der Klausur auf korrekte Daten überprüfen. Legen Sie dazu Ihren **Studierendenausweis** und einen **amtlichen Lichtbildausweis** bereit.
8. Wir werden den Termin für die Klausureinsicht auf unserer Website bekanntgeben: `tcs.cs.tu-bs.de/teaching/TheoInf1_WS_20222023.html`.
9. Die **Bearbeitungszeit** beträgt **120 Minuten**.
10. Mit **40 Punkten** ist die Klausur **sicher bestanden.**

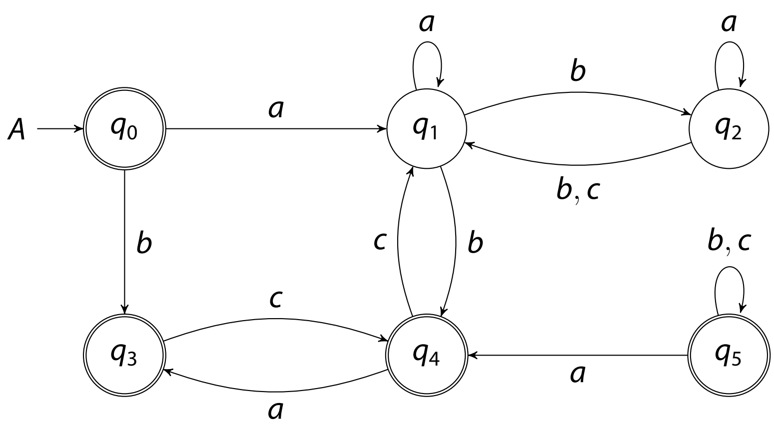
Bepunktung: (wird von den Korrektoren ausgefüllt)

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
Max.	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	**100**
Punkte											

1. Determinisierung und Komplementierung

10 Punkte

Berechnen Sie einen DFA zur Komplementsprache $\overline{\mathcal{L}(A)}$ der Sprache $\mathcal{L}(A)$ des folgenden NFA A über $\Sigma = \{a, b\}$. Verwenden Sie hierzu die Rabin-Scott-Potenzmengenkonstruktion aus der Vorlesung. Konstruieren Sie nur die vom Startzustand erreichbaren Zustände.



2. CYK

10 Punkte

Betrachten Sie die kontextfreie Grammatik $G = \langle \{S, A, B, C\}, \Sigma, P, S \rangle$ über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$, mit den folgenden Produktionsregeln.

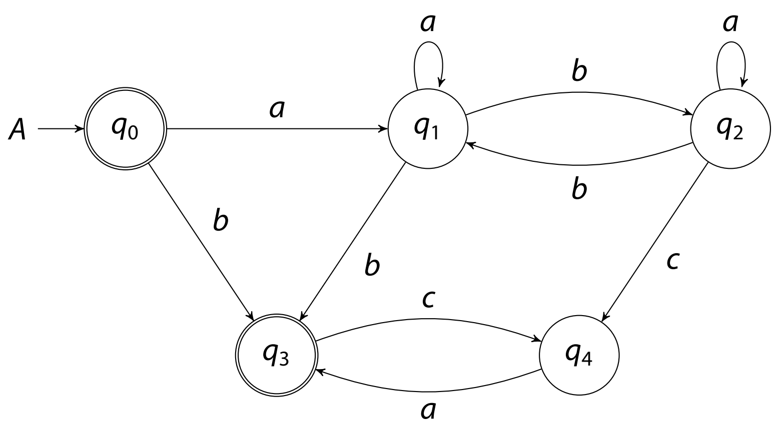
$$
\begin{aligned}
S &\to AA \mid BA \mid BB\,, \\
A &\to a \mid AC \mid BC\,, \\
B &\to b \mid CS\,, \\
C &\to b\,.
\end{aligned}
$$

Nutzen Sie den Cocke-Younger-Kasami-Algorithmus aus der Vorlesung, um zu bestimmen, ob das Wort $w = bbbaaa$ von der kontextfreien Grammatik G erzeugt wird. Füllen Sie die Tabelle vollständig aus.

3. NFA zu REG mit Ardens Lemma

10 Punkte

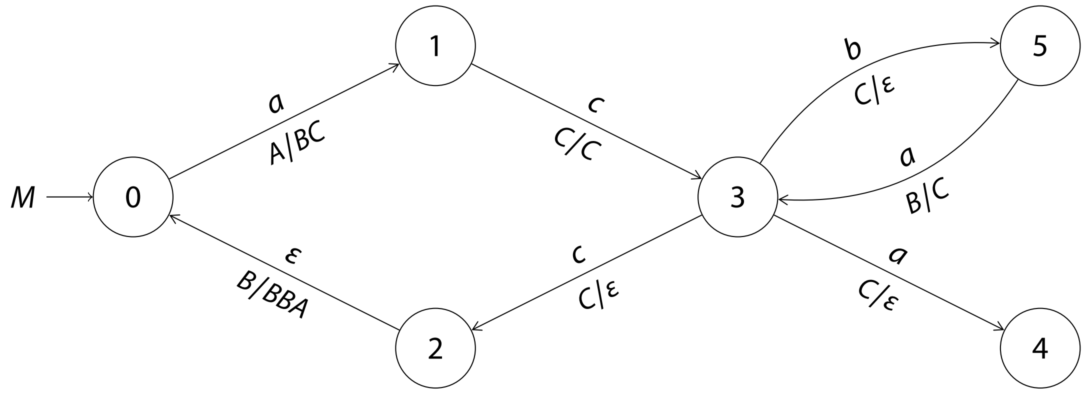
Geben Sie einen regulären Ausdruck an, der die Sprache $\mathcal{L}(A)$ des folgenden NFA A über $\Sigma = \{a, b, c\}$ beschreibt. Stellen Sie hierzu ein Gleichungssystem auf und lösen Sie es unter Verwendung von Ardens Lemma.



4. Tripelkonstruktion

10 Punkte

Betrachten Sie den Pushdown-Automaten $M = \langle \{0,1,2,3,4,5\}, \{a,b,c\}, \{A,B,C\}, q_0, A, \delta \rangle$, der mit leerem Stack akzeptiert und dessen Transitionsrelation δ wiefolgt definiert ist.



Verwenden Sie die Tripelkonstruktion aus der Vorlesung, um eine kontextfreie Grammatik G mit $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(G)$ zu bestimmen.

5. Pumping-Lemma

$\boxed{7 + 3 = 10 \text{ Punkte}}$

Es sei $\Sigma = \{a, b\}$. Betrachten Sie die Sprachen

$$L = \left\{ a^n.b^m \mid n, m \in \mathbb{N}, n \text{ ist gerade oder } n = 3m \right\} \text{ und}$$

$$L' = \left\{ w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a \text{ ist gerade oder } |w|_a = 3|w|_b \right\} .$$

a) Zeigen Sie unter Verwendung des Pumping-Lemmas, dass L nicht regulär ist.

b) Zeigen Sie, welche Konsequenz sich dadurch für die Sprache L' ergibt.

6. Automatenkonstruktion

5 + 5 = 10 Punkte

Betrachten Sie die Sprache $L = \{w \in (a \cup ab)^* \mid w = x.b.y, |x| = |x|_a + |y|_a\} \subseteq \{a, b\}^*$.

a) Konstruieren Sie einen PDA M, der L akzeptiert. Geben Sie insbesondere die Akzeptanzbedingung ihres Automaten an.

b) Erklären Sie jeden Zustand und jedes Bandsymbol ihrer Konstruktion.

7. Very Busy Expressions

1 + 2 + 2 + 5 = 10 Punkte

Betrachten Sie das vorliegende while-Programm c. Finden Sie für jeden Block b die Menge der Ausdrücke, die in jedem Weg nach Ausführung dieses Blocks berechnet werden müssen, ohne dass zwischendurch eine Variable neu zugewiesen wird.

c: $[x := 1024]^0$
while $[x^2 \geq 128]^1$ **do**
  $[y := 2x]^2$
  while $[y \geq 0]^3$ **do**
    $[y := y - 2x]^4$
  end while
  $[x := x + y]^5$
end while
$[y := 2x]^6$

a) Zeichnen Sie den Kontrollflussgraphen $G = \langle B, E, F \rangle$ zu c. Markieren Sie insbesondere die Extremal-Blöcke E. Beachten Sie, dass es sich hier um eine Rückwärts-Analyse handelt.

b) Listen Sie die Menge Exp^- alle Ausdrücke in c auf, außer Konstanten und einzelne Variablen (Es sollten hier 6 sein). Nennen Sie für jede Variable $z \in \mathrm{Var}$ auch $\mathrm{sub}^{-1}(z) \cap \mathrm{Exp}^-$, die Menge aller Ausdrücke, die die Variable z enthalten.

c) Betrachten Sie den Verband $D = \langle \mathcal{P}(\mathrm{Exp}^-), \subseteq \rangle$. Geben Sie für jeden Block $b \in B$ die Mengen $\mathrm{gen}_b, \mathrm{kill}_b \subseteq \mathrm{Exp}^-$ an, sodass $f_b(X) = (X \setminus \mathrm{kill}_b) \cup \mathrm{gen}_b$ eine geeignete monotone Transferfunktion über diesem Verband ist.

d) Betrachten Sie das Datenflusssystem $\langle G, D, \varnothing, (f_b)_{b \in B} \rangle$. Geben Sie das induzierte Gleichungssystem an und bestimmen Sie seine kleinste Lösung mit dem Satz von Kleene. Beachten Sie dabei, dass es sich hier um eine Must-Analyse handelt.

8. Quiz

$\boxed{2 + 2 + 3 + 3 = 10 \text{ Punkte}}$

Bestimmen Sie zu jeder der folgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist. Geben Sie jeweils einen kurzen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

a) Sei L_1 eine kontextfreie Sprache und L_2 regulär. Ist $L_1 \setminus L_2$ immer kontextfrei?

b) Es sei $k \in \mathbb{N}$. Die Sprachklasse Reg_k enthalte genau die Sprachen von DFA mit bis zu k Zuständen. Ist Reg_k unter Vereinigung abgeschlossen?

c) Sei L_1 kontextfrei. Haben alle Grammatiken für L_1 in Chomsky-Normalform die selbe Anzahl von nützlichen Nichtterminalen?

d) Sei $\langle D, \sqsubseteq \rangle$ ein vollständiger Verband und $f : D \to \mathcal{P}(D)$ mit $f(d) = \{d' \in D \mid d' \sqsubseteq d\}$. Damit enthält $f(D) = \{f(d) \mid d \in D\} \subset \mathcal{P}(D)$ die „nach unten geöffneten" Teilmengen von D. Ist $\langle f(D), \subseteq \rangle$ ein vollständiger Verband?

9. Myhill-Nerode

6 + 3 + 1 = 10 Punkte

Betrachten Sie die folgende Sprache

$$L = \left\{ w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a \leq |w|_b \right\} .$$

Es wird die folgende Gleichung vermutet:

$$\left[a^n\right]_{\equiv_L} = \left\{ w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a = n + |w|_b \right\} .$$

a) Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$, die Äquivalenzklasse $[a^n]_{\equiv_L}$ wie oben charakterisiert ist.

b) Nutzen Sie dieses Wissen und den Satz von Myhill & Nerode, um zu zeigen, dass L nicht regulär ist.

c) Finden Sie einen Repräsentanten für jede weitere, bisher nicht genannte Klasse.

10. Purer Pushdown-Automat

$\boxed{4 + 6 = 10 \text{ Punkte}}$

Ein purer Pushdown-Automat über einem Alphabeten Σ ist ein 3-Tupel $M = \langle \Gamma, \alpha, T \rangle$ mit initialem Stapelinhalt $\alpha \in \Gamma^*$, mitunter auch ein ganzes Wort, und einer endlichen Transitionsrelation $T \subseteq \Gamma^* \times (\Sigma \cup \varepsilon) \times \Gamma^*$. Diese Automaten sind in der Lage mit einer einzigen Transition ganze Wörter aus dem Stapel zu entfernen und können daher mehr als nur das Top-Symbol sehen.

Ohne Zustand besteht eine Konfiguration nur aus dem Stapelinhalt Γ^*. Jede Transition $\langle x, s, y \rangle \in T$ liest den Buchstaben s aus der Eingabe und ersetzt den exakten oberen Inhalt $x \in \Gamma^*$ mit $y \in \Gamma^*$, ganz gleich welcher Inhalt $\delta \in \Gamma^*$ weiter unten steht. Dadurch entstehen die Transitionen $\delta.x \xrightarrow{s}_M \delta.y$ über Konfigurationen.

Es gilt die Akzeptanz-Bedingung, sobald der Stapel leer ist und die Eingabe vollständig abgearbeitet ist.

Die Sprache von M ist daher $\mathcal{L}(M) := \{w \in \Sigma^* \mid \alpha \xrightarrow{w}{}^{*}_{M} \varepsilon\}$ mit der reflexiven, transitiven Hülle von $\rightarrow_M$.

a) Zeigen Sie, dass jede kontextfreie Sprache durch einen puren Pushdown akzeptiert wird.

b) Zeigen Sie, dass die Sprache $\mathcal{L}(M)$ jedes puren Pushdown-Automaten M kontextfrei ist.