Prof. Dr. Roland Meyer
René Maseli

Probeklausur
Theoretische Informatik 1
30. Januar 2023

TU Braunschweig
Wintersemester 2022/2023

1. **Bitte am Anfang ausfüllen:**

   Vorname:

   Nachname:

   Matrikelnummer:

   Unterschrift:

2. Die Nummer Ihrer Klausur ist `# 1`. Bitte merken Sie sich die Nummer. Wir werden die Klausurergebnisse anonymisiert unter Verwendung der Nummern bekanntgeben.
3. Achten Sie darauf, dass Ihre Klausur **vollständig ist** und **getackert bleibt** (11 Blätter).
4. Benutzen Sie **nur das an dieses Blatt angeheftete Papier**. Bei Bedarf können wir weitere Leerblätter austeilen. Wenn der Platz auf der Vorderseite des jeweiligen Aufgabenblatts nicht ausreicht, **machen Sie kenntlich**, wo Sie die Bearbeitung der Aufgabe fortsetzen.
5. Als Hilfsmittel sind **ausschließlich** Sprachwörterbücher sowie ein beidseitig **handschriftlich beschriebenes DIN A4-Blatt** erlaubt. Elektronische Geräte müssen während der Klausur ausgeschaltet bleiben. Täuschungsversuche werden als nicht bestanden gewertet und dem Prüfungsamt gemeldet.
6. Schreiben Sie leserlich und bearbeiten Sie Ihre Klausur mit einem dokumentenechten Stift (**nicht mit Bleistift**, kein Tipp-Ex, kein Tintenkiller) und **nicht in roter oder grüner Farbe**.
7. Wir werden das Deckblatt während der Klausur auf korrekte Daten überprüfen. Legen Sie dazu Ihren **Studierendenausweis** und einen **amtlichen Lichtbildausweis** bereit.
8. Wir werden den Termin für die Klausureinsicht auf unserer Website bekanntgeben: `tcs.cs.tu-bs.de/teaching/TheoInf1_WS_20222023.html`.
9. Die **Bearbeitungszeit** beträgt **120 Minuten**.
10. Mit **40 Punkten** ist die Klausur **sicher bestanden.**

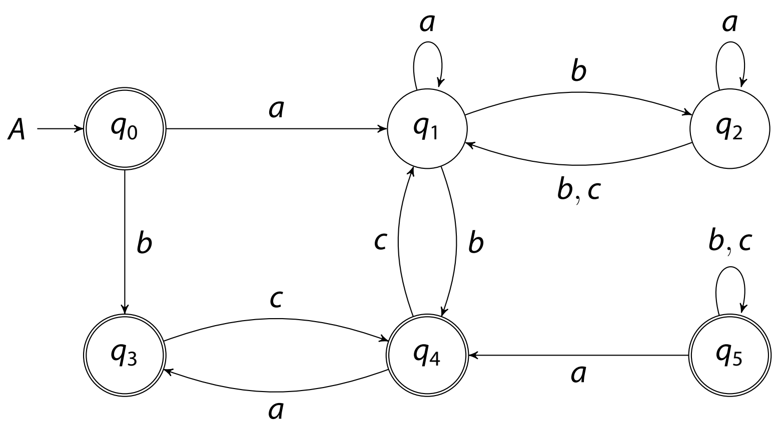
Bepunktung: (wird von den Korrektoren ausgefüllt)

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
Max.	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	**100**
Punkte											

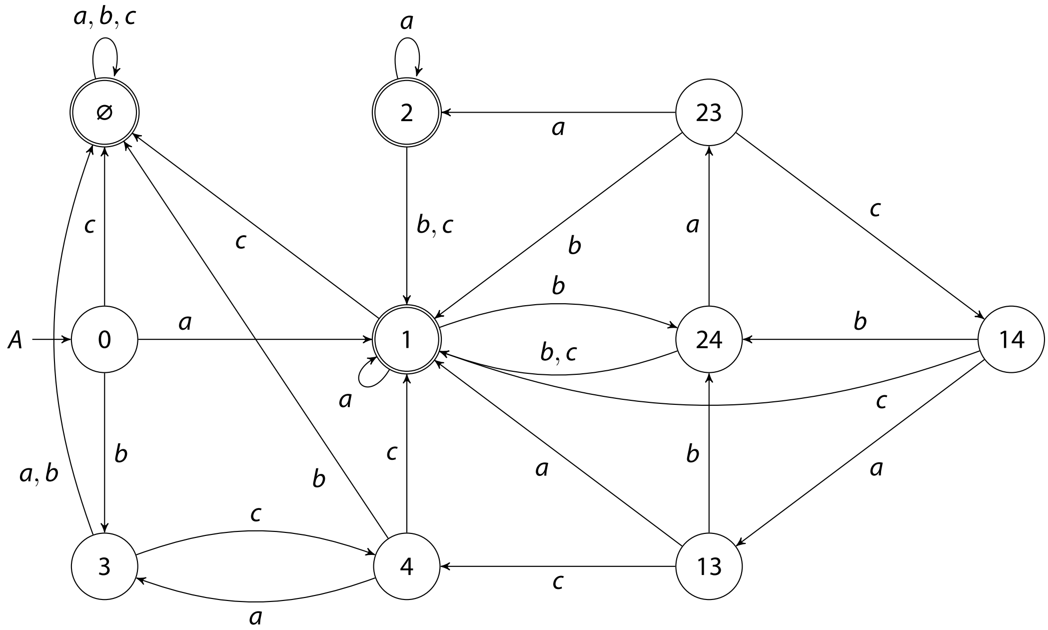
1. Determinisierung und Komplementierung

10 Punkte

Berechnen Sie einen DFA zur Komplementsprache $\overline{\mathcal{L}(A)}$ der Sprache $\mathcal{L}(A)$ des folgenden NFA A über $\Sigma = \{a, b, c\}$. Verwenden Sie hierzu die Rabin-Scott-Potenzmengenkonstruktion aus der Vorlesung. Konstruieren Sie nur die vom Startzustand erreichbaren Zustände.



Vorschlag:



2. CYK

10 Punkte

Betrachten Sie die kontextfreie Grammatik $G = \langle\{S, A, B, C\}, \Sigma, P, S\rangle$ über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$, mit den folgenden Produktionsregeln.

$$S \to AA \mid BA \mid BB\,,$$
$$A \to a \mid AC \mid BC\,,$$
$$B \to b \mid CS\,,$$
$$C \to b\,.$$

a) Nutzen Sie den Cocke-Younger-Kasami-Algorithmus aus der Vorlesung, um zu bestimmen, ob das Wort $w = bbbaaa$ von der kontextfreien Grammatik G erzeugt wird. Füllen Sie die Tabelle vollständig aus.

b) Wie viele Präfixe von w liegen in der Sprache von G? Ein Wort $x \in \Sigma^*$ ist ein Präfix von w, wenn w von der Form $w = x.y$ mit $y \in \Sigma^*$ ist.

Vorschlag:

a) Da S in der Zelle für das volle Teilwort enthalten ist, gilt $w \in \mathcal{L}$.

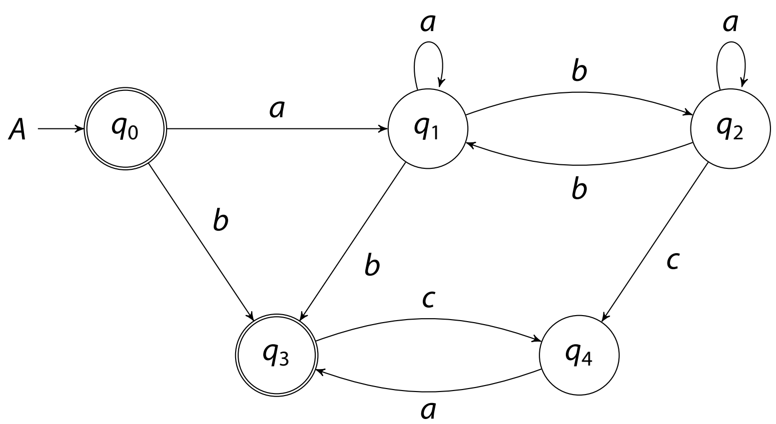
BC	AS	ABS	BS	BS	S
	BC	AS	BS	S	B
		BC	S	B	S
			A	S	
				A	S
					A

b) Zähle wie viele Zellen in der ersten Zeile S enthalten: 5. (ε ist auch ein Präfix, kann aber nicht erzeugt werden.)

3. NFA zu REG mit Ardens Lemma

10 Punkte

Geben Sie einen regulären Ausdruck an, der die Sprache $\mathcal{L}(A)$ des folgenden NFA A über $\Sigma = \{a, b, c\}$ beschreibt. Stellen Sie hierzu ein Gleichungssystem auf und lösen Sie es unter Verwendung von Ardens Lemma.



Vorschlag:

Der Automat enthält vier erreichbare Schleifen: $q_1 \xrightarrow{a} q_1$, $q_2 \xrightarrow{a} q_2$, $q_1 \xrightarrow{b} q_2 \xrightarrow{b} q_1$, $q_3 \xrightarrow{c} q_4 \xrightarrow{a} q_3$. Ardens Lemma muss höchstens einmal für jede davon angewandt werden. Da es aber an Gleichungen angewandt wird, könnten einzelne Anwendungen jeweils mehrere Schleifen lösen. Das Gleichungssystem ist eindeutig.

$$X_0 = \varepsilon \cup aX_1 \cup bX_3 \qquad X_1 = aX_1 \cup bX_2 \cup bX_3 \qquad X_2 = bX_1 \cup aX_2 \cup cX_4 \qquad X_3 = \varepsilon \cup cX_4 \qquad X_4 = aX_3$$

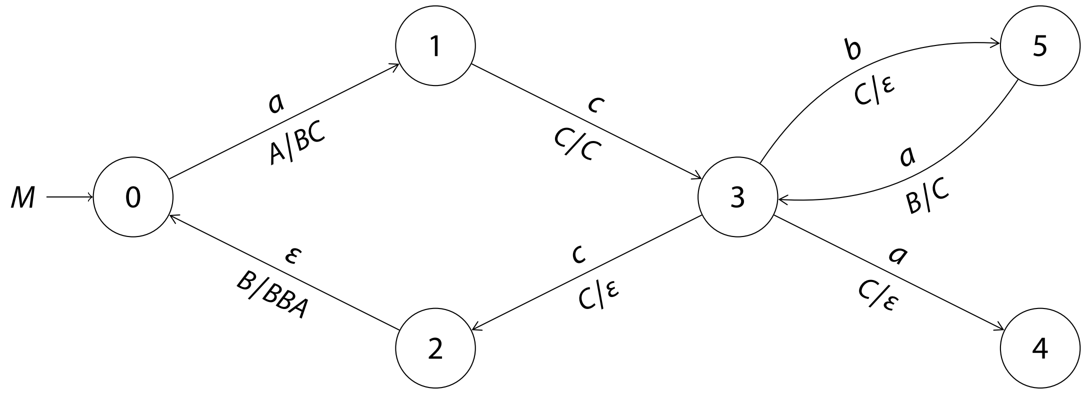
Hinweis: Es genügt einen Ausdruck für den Startzustand zu finden. Zwischenergebnisse sind nur dann anzugeben, wenn die Gleichung wechselt, oder Ardens Lemma angewandt wird. Anwendungen der Assoziativität, Distributivität, Neutralität, usw. müssen nicht genannt werden. Priorität sollten Schleifen haben, die keine anderen Schleifen erreichen.

$$
\begin{aligned}
X_3 &= \varepsilon \cup caX_3 && X_4 \text{ eingesetzt}\\
&= (ca)^* && \text{Ardens Lemma}\\
X_4 &= a(ca)^* && X_3 \text{ eingesetzt}\\
X_2 &= a^*(bX_1 \cup cX_4) && \text{Ardens Lemma}\\
&= a^*bX_1 \cup a^*cX_4 && \text{Distributivität}\\
&= a^*bX_1 \cup a^*ca(ca)^* && X_4 \text{ eingesetzt}\\
X_1 &= aX_1 \cup bX_2 \cup b(ca)^* && X_3 \text{ eingesetzt}\\
&= aX_1 \cup b\big(a^*bX_1 \cup a^*ca(ca)^*\big) \cup b(ca)^* && X_2 \text{ eingesetzt}\\
&= \big(a \cup ba^*b\big)X_1 \cup \big(ba^*ca \cup b\big)(ca)^* && \text{Distributivität} \times 3\\
&= \big(a \cup ba^*b\big)^*\big(ba^*ca \cup b\big)(ca)^* && \text{Ardens Lemma}\\
\mathcal{L}(A) = X_0 &= \varepsilon \cup aX_1 \cup b(ca)^* && X_3 \text{ eingesetzt}\\
&= \varepsilon \cup a\big(a \cup ba^*b\big)^*\big(ba^*ca \cup b\big)(ca)^* \cup b(ca)^* && X_1 \text{ eingesetzt}
\end{aligned}
$$

4. Tripelkonstruktion

10 Punkte

Betrachten Sie den Pushdown-Automaten $M = \langle\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}, \{a, b, c\}, \{A, B, C\}, q_0, A, \delta\rangle$, der mit leerem Stack akzeptiert und dessen Transitionsrelation δ wiefolgt definiert ist.



a) Beschränken Sie Ihren Suchraum für nützliche Nichtterminale. Welche Zustände besitzen kein Verhalten mit bestimmten Stapel-Symbole als Top? Welche Zustände kommen nicht als Ende einer Berechnung in Frage?

b) Verwenden Sie die Tripelkonstruktion aus der Vorlesung, um eine kontextfreie Grammatik G mit $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(G)$ zu bestimmen.

c) Entfernen Sie alle unnützlichen Nicht-Terminale aus G.

Vorschlag:

Nützliche Tripel haben höchstens die Formen $\langle q_0, A, ?\rangle$, $\langle q_1, C, ?\rangle$, $\langle q_2, B, ?\rangle$, $\langle q_3, C, ?\rangle$, $\langle q_5, B, ?\rangle$, sowie $\langle ?, ?, q_2\rangle$, $\langle ?, ?, q_4\rangle$, $\langle ?, ?, q_5\rangle$.

Hinweis: Beide der folgenden Algorithmen sind zulässig. Es reicht, einen von ihnen zu folgen.

Die Reihenfolge, in der Tripel hinzugefügt werden, ist irrelevant. Hier wurden jeweils die Tripel in einer Warteschlange organisiert.

Wann immer ein neues Tripel gefunden wurde, wurde es hier unterstrichen. Das ist in der Klausur nicht notwendig.

Entlang der Erreichbaren:

$$
\begin{aligned}
S &\to \underline{0A2} \mid \underline{0A4} \mid \underline{0A5} \\
0A2 &\to a\ \underline{1C2}\ \underline{2B2} \mid a\ \underline{1C5}\ \underline{5B2} \\
0A4 &\to a\ 1C2\ \underline{2B4} \mid a\ 1C5\ \underline{5B4} \\
0A5 &\to a\ 1C2\ \underline{2B5} \mid a\ 1C5\ \underline{5B5} \\
1C2 &\to c\ \underline{3C2} \\
2B2 &\to \varepsilon\ 0A2\ 2B2\ 2B2 \mid \varepsilon\ 0A2\ 2B5\ 5B2 \\
&\quad \mid \varepsilon\ 0A5\ 5B2\ 2B2 \mid \varepsilon\ 0A5\ 5B5\ 5B2 \\
1C5 &\to c\ \underline{3C5} \\
5B2 &\to a\ 3C2 \\
2B4 &\to \varepsilon\ 0A2\ 2B2\ 2B4 \mid \varepsilon\ 0A2\ 2B5\ 5B4 \\
&\quad \mid \varepsilon\ 0A5\ 5B2\ 2B4 \mid \varepsilon\ 0A5\ 5B5\ 5B4 \\
5B4 &\to a\ \underline{3C4} \\
2B5 &\to \varepsilon\ 0A2\ 2B2\ 2B5 \mid \varepsilon\ 0A2\ 2B5\ 5B5 \\
&\quad \mid \varepsilon\ 0A5\ 5B2\ 2B5 \mid \varepsilon\ 0A5\ 5B5\ 5B5 \\
5B5 &\to a\ 3C5 \\
3C2 &\to c \\
3C5 &\to b \\
3C4 &\to a
\end{aligned}
$$

Alle erreichbaren Tripel sind hier produktiv:
Sei dazu $F : \mathcal{P}(N) \to \mathcal{P}(N)$ mit
$F(X) = X \cup \{A \in N \mid A \to \alpha \in (X \cup \Sigma)^*\}$.

$$
\begin{aligned}
F(\varnothing) &= \{3C2, 3C4, 3C5\} \\
F^2(\varnothing) &= F(\varnothing) \cup \{1C2, 1C5, 5B2, 5B4, 5B5\} \\
F^3(\varnothing) &= F^2(\varnothing) \cup \{0A2, 0A4, 0A5\} \\
F^4(\varnothing) &= F^3(\varnothing) \cup \{2B2, 2B4, 2B5, S\} \\
F^5(\varnothing) &= F^4(\varnothing) = N
\end{aligned}
$$

Entlang der Produktiven:

$$
\begin{array}{ll}
\underline{3C2} \to c & \underline{3C4} \to a \\
\underline{3C5} \to b & \\
\underline{1C2} \to c\ 3C2 & \underline{5B2} \to a\ 3C2 \\
\underline{1C4} \to c\ 3C4 & \underline{5B4} \to a\ 3C4 \\
\underline{1C5} \to c\ 3C5 & \underline{5B5} \to a\ 3C5 \\
\underline{0A2} \to a\ 1C5\ 5B2 & \underline{0A4} \to a\ 1C5\ 5B4 \\
\underline{0A5} \to a\ 1C5\ 5B5 & \underline{2B2} \to \varepsilon\ 0A5\ 5B5\ 5B2 \\
\underline{2B4} \to \varepsilon\ 0A5\ 5B5\ 5B4 & \underline{2B5} \to \varepsilon\ 0A5\ 5B5\ 5B5 \\
2B2 \to \varepsilon\ 0A2\ 2B2\ 2B2 & 2B4 \to \varepsilon\ 0A2\ 2B2\ 2B4 \\
\quad \mid \varepsilon\ 0A2\ 2B5\ 5B2 & \quad \mid \varepsilon\ 0A2\ 2B5\ 5B4 \\
\quad \mid \varepsilon\ 0A5\ 5B2\ 2B2 & \quad \mid \varepsilon\ 0A5\ 5B2\ 2B4 \\
2B5 \to \varepsilon\ 0A2\ 2B2\ 2B5 & 0A2 \to a\ 1C2\ 2B2 \\
\quad \mid \varepsilon\ 0A2\ 2B5\ 5B5 & 0A4 \to a\ 1C2\ 2B4 \\
\quad \mid \varepsilon\ 0A5\ 5B2\ 2B5 & 0A5 \to a\ 1C2\ 2B5 \\
S \to 0A2 \mid 0A4 \mid 0A5 &
\end{array}
$$

Das produktive Tripel $1C4$ sind hier nicht erreichbar:
Sei dazu $F : \mathcal{P}(N) \to \mathcal{P}(N)$ mit
$F(X) = X \cup \{S\} \cup \{B \in N \mid A \to \alpha B \beta, A \in X\}$.

$$
\begin{aligned}
F(\varnothing) &= \{S\} \\
F^2(\varnothing) &= F(\varnothing) \cup \{0A2, 0A4, 0A5\} \\
F^3(\varnothing) &= F^2(\varnothing) \cup \{1C2, 1C5, 2B2, 2B4, 2B5, 5B2, 5B4, 5B5\} \\
F^4(\varnothing) &= F^3(\varnothing) \cup \{3C2, 3C4, 3C5\} \\
F^5(\varnothing) &= F^4(\varnothing)\ .
\end{aligned}
$$

5. Pumping-Lemma

$\boxed{7 + 3 = 10 \text{ Punkte}}$

Es sei $\Sigma = \{a, b\}$. Betrachten Sie die Sprachen

$$L = \left\{ a^n.b^m \mid n, m \in \mathbb{N}, n \text{ ist gerade oder } n = 3m \right\} \text{ und}$$

$$L' = \left\{ w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a \text{ ist gerade oder } |w|_a = 3|w|_b \right\}.$$

a) Zeigen Sie unter Verwendung des Pumping-Lemmas, dass L nicht regulär ist.

b) Zeigen Sie, welche Konsequenz sich dadurch für die Sprache L' ergibt.

6. Automatenkonstruktion

$\boxed{5 + 5 = 10 \text{ Punkte}}$

Betrachten Sie die Sprache $L = \{w \in (a \cup ab)^* \mid w = x.b.y, |x| = |x|_a + |y|_a\} \subseteq \{a, b\}^*$.

a) Konstruieren Sie einen PDA M, der L akzeptiert. Geben Sie insbesondere die Akzeptanzbedingung ihres Automaten an.

b) Erklären Sie jeden Zustand und jedes Bandsymbol ihrer Konstruktion.

7. Very Busy Expressions

1 + 2 + 2 + 5 = 10 Punkte

Betrachten Sie das vorliegende while-Programm c. Finden Sie für jeden Block b die Menge der Ausdrücke, die in jedem Weg nach Ausführung dieses Blocks berechnet werden müssen, ohne dass zwischendurch eine Variable neu zugewiesen wird.

c: $[x := 1024]^0$
while $[x^2 \geq 128]^1$ **do**
  $[y := 2x]^2$
  while $[y \geq 0]^3$ **do**
    $[y := y - 2x]^4$
  end while
  $[x := x + y]^5$
end while
$[y := 2x]^6$

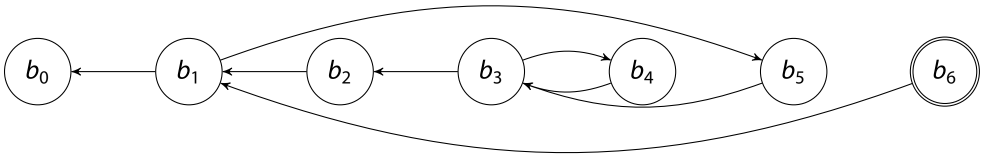
a) Zeichnen Sie den Kontrollflussgraphen $G = \langle B, E, F \rangle$ zu c. Markieren Sie insbesondere die Extremal-Blöcke E. Beachten Sie, dass es sich hier um eine Rückwärts-Analyse handelt.

b) Listen Sie die Menge Exp^- alle Ausdrücke in c auf, außer Konstanten und einzelne Variablen (Es sollten hier 6 sein). Nennen Sie für jede Variable $z \in \text{Var}$ auch $\text{sub}^{-1}(z) \subseteq \text{Exp}^-$, die Menge aller Ausdrücke, die die Variable z enthalten.

c) Betrachten Sie den Verband $D = \langle \mathcal{P}(\text{Exp}^-), \subseteq \rangle$. Geben Sie für jeden Block $b \in B$ die Mengen $\text{gen}_b, \text{kill}_b \subseteq \text{Exp}^-$ an, sodass $f_b(X) = (X \setminus \text{kill}_b) \cup \text{gen}_b$ eine geeignete monotone Transferfunktion über diesem Verband ist.

d) Betrachten Sie das Datenflusssystem $\langle G, D, \varnothing, (f_b)_{b \in B} \rangle$. Geben Sie das induzierte Gleichungssystem an und bestimmen Sie seine kleinste Lösung mit dem Satz von Kleene. Beachten Sie dabei, dass es sich hier um eine Must-Analyse handelt.

Vorschlag:



$\text{Exp}^- = \{x^2, x^2 \geq 128, 2x, y \geq 0, y - 2x, x + y\}$
$\text{sub}^{-1}(x) = \{x^2, x^2 \geq 128, 2x, y - 2x, x + y\}$
$\text{sub}^{-1}(y) = \{y \geq 0, y - 2x, x + y\}$

In der folgenden Tabelle werden die kompletten Zwischenergebnisse angegeben.

	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6
gen_b	$\text{sub}^{-1}(x)$	$\varnothing$	$\text{sub}^{-1}(y)$	$\varnothing$	$\text{sub}^{-1}(y)$	$\text{sub}^{-1}(x)$	$\text{sub}^{-1}(y)$
kill_b	$\varnothing$	$x^2, x^2 \geq 128$	$2x$	$y \geq 0$	$2x, y - 2x$	$x + y$	$2x$
X_b	$f_1(X_1)$	$f_2(X_2) \cap f_6(X_6)$	$f_3(X_3)$	$f_4(X_4) \cap f_5(X_5)$	$f_3(X_3)$	$f_1(X_1)$	$\varnothing$
$\top$	Exp^-	Exp^-	Exp^-	Exp^-	Exp^-	Exp^-	Exp^-
$F(\top)$	Exp^-	$x^2, x^2 \geq 128, 2x$	Exp^-	$\varnothing$	Exp^-	Exp^-	$\varnothing$
$F^2(\bot)$	$x^2, x^2 \geq 128, 2x$	$2x$	$y \geq 0$	$\varnothing$	$y \geq 0$	$x^2, x^2 \geq 128, 2x$	$\varnothing$
$F^3(\bot)$	$x^2, x^2 \geq 128, 2x$	$2x$	$y \geq 0$	$\varnothing$	$y \geq 0$	$x^2, x^2 \geq 128, 2x$	$\varnothing$

Die Iteration endet mit $\text{gfp}(F) = F^2(\bot)$

8. Quiz

$\boxed{2 + 2 + 3 + 3 = 10 \text{ Punkte}}$

Bestimmen Sie zu jeder der folgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist. Geben Sie jeweils einen kurzen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

a) Sei L_1 eine kontextfreie Sprache und L_2 regulär. Ist $L_1 \setminus L_2$ immer kontextfrei?

b) Es sei $k \in \mathbb{N}$. Die Sprachklasse Reg_k enthalte genau die Sprachen von DFA mit bis zu k Zuständen. Ist Reg_k unter Vereinigung abgeschlossen?

c) Sei L_1 kontextfrei. Haben alle Grammatiken für L_1 in Chomsky-Normalform die selbe Anzahl von nützlichen Nichtterminalen?

d) Sei $\langle D, \sqsubseteq \rangle$ ein vollständiger Verband und $f : D \to \mathcal{P}(D)$ mit $f(d) = \{d' \in D \mid d' \sqsubseteq d\}$. Damit enthält $f(D) = \{f(d) \mid d \in D\} \subset \mathcal{P}(D)$ die „nach unten geöffneten" Teilmengen von D. Ist $\langle f(D), \subseteq \rangle$ ein vollständiger Verband?

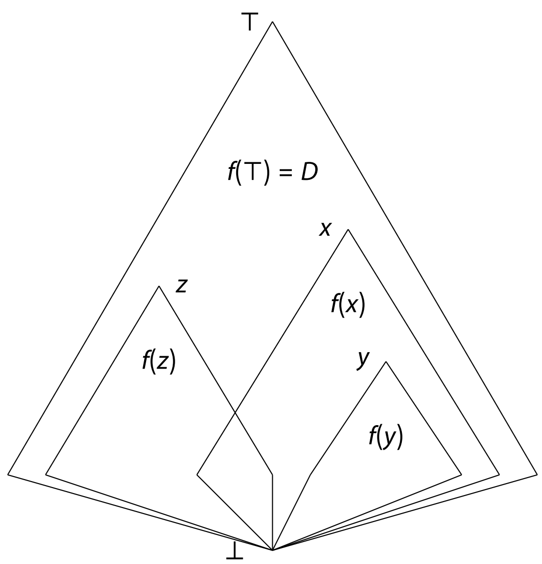
Vorschlag:

Ja, $L_1 \setminus L_2 = L_1 \cap \overline{L_2}$ ist der Schnitt einer kontextfreien Sprache mit einer regulären Sprache, und daher wieder kontextfrei.

Nein, $\{ab\} \in \mathrm{Reg}_4$ und $\{ba\} \in \mathrm{Reg}_4$, aber $\{ab, ba\} \in \mathrm{Reg}_5$.

Nein, $S \to AA \mid AB, A \to a, B \to a$ ist in CNF, aber $S \to AA, A \to a$ ist sprachäquivalent und hat weniger Nichtterminale.

Ja, $\subseteq$ ist eine partielle Ordnung und für jede Teilmenge $Y \subseteq f(D)$ gibt es ein $X \subseteq D$ mit $Y = f(X)$, daher $\bigsqcup Y = f(\bigsqcup X)$ und $\bigsqcap Y = f(\bigsqcap X)$. Hilfreich kann auch eine Zeichnung wie diese sein:



9. Myhill-Nerode

$\boxed{6 + 3 + 1 = 10 \text{ Punkte}}$

Betrachten Sie die folgende Sprache

$$L = \left\{ w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a \leq |w|_b \right\} .$$

Es wird die folgende Gleichung vermutet:

$$\left[a^n\right]_{\equiv_L} = \left\{ w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a = n + |w|_b \right\} .$$

a) Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$, die Äquivalenzklasse $[a^n]_{\equiv_L}$ wie oben charakterisiert ist.

b) Nutzen Sie dieses Wissen und den Satz von Myhill & Nerode, um zu zeigen, dass L nicht regulär ist.

c) Finden Sie einen Repräsentanten für jede weitere, bisher nicht genannte Klasse.

10. Purer Pushdown-Automat

$\boxed{4 + 6 = 10 \text{ Punkte}}$

Ein purer Pushdown-Automat über einem Alphabeten Σ ist ein 3-Tupel $M = \langle \Gamma, \alpha, T \rangle$ mit initialem Stapelinhalt $\alpha \in \Gamma^*$, mitunter auch ein ganzes Wort, und einer endlichen Transitionsrelation $T \subseteq \Gamma^* \times (\Sigma \cup \varepsilon) \times \Gamma^*$. Diese Automaten sind in der Lage mit einer einzigen Transition ganze Wörter aus dem Stapel zu entfernen und können daher mehr als nur das Top-Symbol sehen.

Ohne Zustand besteht eine Konfiguration nur aus dem Stapelinhalt Γ^*. Jede Transition $\langle x, s, y\rangle \in T$ liest den Buchstaben s aus der Eingabe und ersetzt den exakten oberen Inhalt $x \in \Gamma^*$ mit $y \in \Gamma^*$, ganz gleich welcher Inhalt $\delta \in \Gamma^*$ weiter unten steht. Dadurch entstehen die Transitionen $\delta.x \xrightarrow{s}_M \delta.y$ über Konfigurationen.

Es gilt die Akzeptanz-Bedingung, sobald der Stapel leer ist und die Eingabe vollständig abgearbeitet ist.

Die Sprache von M ist daher $\mathcal{L}(M) := \{w \in \Sigma^* \mid \alpha \xrightarrow{w}{}_M^* \varepsilon\}$ mit der reflexiven, transitiven Hülle von $\rightarrow_M$.

a) Zeigen Sie, dass jede kontextfreie Sprache durch einen puren Pushdown akzeptiert wird.

b) Zeigen Sie, dass die Sprache $\mathcal{L}(M)$ jedes puren Pushdown-Automaten M kontextfrei ist.

Vorschlag:

a) Sei $L \subseteq \Sigma^*$ kontextfrei.
Sei $M = \langle\{0\}, \Sigma, \Gamma, 0, \#, \delta\rangle$ ein PDA mit $\mathcal{L}(M) = L$ und mit einem Zustand. Dieser existiert, wie in der Vorlesung gezeigt.
Der pure Pushdown $M' = \langle\Gamma, \#, T\rangle$ erfüllt $\mathcal{L}(M') = L$:
Dabei sei genau dann $\langle x, s, y\rangle \in T$, wenn $\langle 1, x, s, y, 1\rangle \in \delta$.

b) Sei $M = \langle\Gamma, \alpha, T\rangle$ ein purer Pushdown.
Sei $\$ \notin \Gamma$.
Der gewöhnliche Pushdown $M' = \langle Q, \Sigma, \Gamma \cup \{\$\}, q_0, \$, \delta\rangle$ erfüllt $\mathcal{L}(M') = \mathcal{L}(M)$.
Dabei enthalten Q und δ ausschließlich die folgenden Elemente. Für jede pure Transition $\langle x_1 \ldots x_n.x, s, y\rangle \in T$ mit $x_1 \ldots x_n \in \Gamma$ und $x \in \Gamma \cup \{\varepsilon\}$ gibt es neue Zustände $q_1 \ldots q_n \in Q$ und die Transitionsfolge $q_0 \xrightarrow[x_n/\varepsilon]{\varepsilon} q_1 \cdots q_n \xrightarrow[x_1/y]{s} q_0 \in \delta^{n+1}$.