Thomas Haas
Prof. Dr. Roland Meyer

Theoretische Informatik 2
Übungsblatt 4

TU Braunschweig
Sommersemester 2021

Ausgabe: 15.06.2021 Abgabe: 25.06.2021, 18:00

Geben Sie Ihre Lösungen bis Freitag, 25.06.2021 18:00 Uhr, ab. Fertigen Sie dazu ihre Hausaufgaben direkt in .pdf Form an oder scannen ihre handschriftlichen Hausaufgaben ein und laden diese in ihrer Gruppe auf stud.ip hoch.

Aufgabe 1: PCP [9 Punkte]

Im folgenden betrachten Sie Abwandlungen des PCP-Problems.

(a) [3 Punkte] Zeigen Sie, dass das 1-PCP, also das PCP für Instanzen, bei denen die x_i und y_i Wörter über dem unären Alphabet $\{1\}$ sind, entscheidbar ist.

(b) [3 Punkte] Es sei $|\Sigma| \geqslant 2$. Das $\text{PCP}_{\geqslant k}$ ist folgendes Entscheidungsproblem.

> $\underline{\text{PCP}_{\geqslant k}}$
> **Gegeben:** Eine endliche Menge von Tupeln aus Wörter $(x_1, y_1), \ldots, (x_m, y_m)$ über Σ^*
> **Entscheide:** Gibt es eine endliche, nicht-leere Sequenz von Indizes $i_1, \ldots, i_n$ mit $n \geqslant k$ und $x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_n} = y_{i_1}y_{i_2}\ldots y_{i_n}$?

Zeigen Sie, dass das $\text{PCP}_{\geqslant k}$ unentscheidbar ist.

(c) [3 Punkte] Es sei $|\Sigma| \geqslant 2$. Das Last-PCP ist folgendes Entscheidungsproblem.

> <u>Last-PCP</u>
> **Gegeben:** Eine endliche Menge von Tupeln aus Wörter $(x_1, y_1), \ldots, (x_m, y_m)$ über Σ^*
> **Entscheide:** Gibt es eine endliche, nicht-leere Sequenz von Indizes $i_1, \ldots, i_n$ mit $i_n = m$ und $x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_n} = y_{i_1}y_{i_2}\ldots y_{i_n}$?

Zeigen Sie, dass das Last-PCP unentscheidbar ist.

Aufgabe 2: Der Satz von Rice [8 Punkte]
Wenden Sie den Satz von Rice, falls möglich, auf die folgenden Sprachen an. Begründen Sie jeweils, warum oder warum nicht der Satz angewendet werden kann.

(a) [2 Punkte] $\mathcal{L}_{Dec} = \{w \in \{0,1\}^* \mid \mathcal{L}(M_w)$ ist entscheidbar. $\}$

(b) [2 Punkte] $\mathcal{L}_{Even} = \{w \in \{0,1\}^* \mid M_w$ akzeptiert ein Wort gerader Länge.$\}$

(c) [2 Punkte] $\mathcal{L}_{N-S-Dec} = \{w \in \{0,1\}^* \mid \mathcal{L}(M_w)$ ist nicht semi-entscheidbar. $\}$

(d) [2 Punkte] $\mathcal{L}_{Step} = \{w \in \{0,1\}^* \mid M_w$ akzeptiert kein Wort in unter 100 Schritten.$\}$

Aufgabe 3: Totalität [6 Punkte]
Betrachten Sie die Sprache $\mathcal{L}_{total} = \{w \in \{0,1\}^* \mid M_w$ ist ein Entscheider.$\}$. Warum kann der Satz von Rice hier nicht angewendet werden? Was ist der Unterschied zu Aufgabenteil (a) in der vorherigen Aufgabe 2?

Zeigen Sie per Reduktion, dass $\mathcal{L}_{total}$ weder semi-entscheidbar noch co-semi-entscheidbar ist.

Hinweis. Sie haben in der letzten Hausaufgabe bereits von einer Sprache gezeigt, dass diese weder semi-entscheidbar noch co-semi-entscheidbar ist.

Aufgabe 4: Komplexitätsanalyse [8 Punkte]
Betrachten Sie die folgende Sprache

$$L_{subword} = \{u\#w \mid w = x.u.y \text{ mit } x, y, u, w \in \{a,b\}^*\}.$$

Hierbei ist $u\#w$ ein Wort der Sprache, wenn u ein zusammenhängendes Teilwort von w ist.

Ordnen Sie die Sprache $L_{subword}$ möglichst genau in die folgenden Klassen ein: $DTIME(O(f))$, $NTIME(O(g))$, $DSPACE(O(h))$ und $NSPACE(O(j))$. Findet Sie dazu möglichst kleine Funktionen f, g, h und j, sodass $L_{subword}$ in den jeweiligen Klassen enthalten ist.

Begründen Sie ihre Wahl, indem Sie jeweils die Arbeitsweise einer passenden Turingmaschine erklären (genaue Konstruktionen sind unnötig).