Thomas Haas
Prof. Dr. Roland Meyer

Theoretische Informatik 2
Übungsblatt 5

TU Braunschweig
Sommersemester 2021

Ausgabe: 29.06.2021 Abgabe: 09.07.2021, 18:00

Geben Sie Ihre Lösungen bis Freitag, den 09.07.2021 18:00 Uhr, ab. Fertigen Sie dazu ihre Hausaufgaben direkt in .pdf Form an oder scannen ihre handschriftlichen Hausaufgaben ein und laden diese in ihrer Gruppe auf stud.ip hoch.

Aufgabe 1: Härte und Vollständigkeit [6 Punkte]

Beweisen Sie die folgenden Lemmata:

a) [3 Punkte] Sei $\mathcal{C}$ eine Komplexitätsklasse, R eine Menge von Funktionen und $\mathcal{L} \in \mathcal{C}$ ein Problem. Wenn $\mathcal{L}$ $\mathcal{C}$-hart/vollständig ist, dann ist $\overline{\mathcal{L}}$ co$\mathcal{C}$-hart/vollständig (jeweils bezüglich R-many-one-Reduktionen).

b) [3 Punkte] Seien $\mathcal{L}, \mathcal{L}'$ Probleme mit $\mathcal{L} \leqslant_m^{log} \mathcal{L}'$. Wenn $\mathcal{L}'$ in NL ist, dann auch $\mathcal{L}$.

   Hinweis: Wie in der Vorlesung angemerkt, ist die Ausgabe $f(x)$ einer logspace-Reduktion höchstens polynomiell groß, d.h. es gibt einen konstanten Exponenten $k \in N$ mit $|f(x)| \in \mathcal{O}(|x|^k)$.

Aufgabe 2: Vollständigkeit in L [6 Punkte]

Sei Σ ein endliches Alphabet. Beweisen Sie:

a) [3 Punkte] Ein Problem $\mathcal{L} \subseteq \Sigma^*$ ist in L genau dann, wenn $\mathcal{L} \leqslant_m^{log} \{1\}$.
   Hier bezeichnet $\{1\}$ die Sprache $\{1\} \subseteq \{0, 1\}^*$.

b) [3 Punkte] Jede Sprache $\mathcal{L} \subseteq \Sigma^*$ in L mit $\mathcal{L} \neq \varnothing$ und $\mathcal{L} \neq \Sigma^*$ ist bereits L-vollständig (bezüglich logspace-many-one-Reduktionen).

Aufgabe 3: Erreichbarkeit in azyklischen Graphen [10 Punkte]

In der Vorlesung wurde die NL-Vollständigkeit von PATH gezeigt. Wir interessieren uns im folgenden nun für weitere NL-vollständige Probleme.

a) [5 Punkte] Betrachten Sie das folgende Problem.

> Pfadexistenz in azyklischen Graphen (ACYCLICPATH)
>
> **Gegeben:** Gerichteter azyklischer Graph $G = (V, R)$, Knoten $s, t \in V$
>
> **Entscheide:** Gibt es einen Pfad von s nach t in G?

Zeigen Sie, dass sich das Problem PATH auf ACYCLICPATH mit einer logspace-many-one Reduktion reduzieren lässt. Geben Sie die Funktion explizit an und beweisen Sie, dass sie eine Reduktion ist.

b) [5 Punkte] Beim Problem ACYCLICPATH nehmen wir an, dass die Eingabe ein azyklischer Graph ist. Wir wollen nun für einen gegebenen Graphen feststellen, ob er diese Eigenschaft hat.

> Azyklizität (ACYCLIC)
>
> **Gegeben:** Gerichteter Graph $G = (V, R)$
>
> **Entscheide:** Ist G azyklisch?

Beweisen Sie, dass ACYCLIC selbst bereits NL-vollständig ist.

Hinweis: Reduzieren Sie ACYCLICPATH auf $\overline{\text{ACYCLIC}}$ und verwenden Sie den Satz von Immerman und Szelepcsényi (NL = coNL).

Aufgabe 4: Abschlusseigenschaften von NL [8 Punkte]
Im folgenden betrachten wir die Klassen der NL und NL-vollständigen Probleme.

a) [4 Punkte] Zeigen Sie, dass die Klasse NL unter den folgenden Operationen abgeschlossen ist:

- Vereinigung, Durchschnitt und Komplement
- Kleene Stern

b) [4 Punkte] Nun untersuchen Sie die Klasse der NL-vollständigen Probleme bezüglich der ersten drei obigen Abschlusseigenschaften (Vereinigung, Durchschnitt und Komplement).