

Theoretische Informatik 2 Übungsblatt 6 (Bonus)

Thomas Haas
Prof. Dr. Roland Meyer

TU Braunschweig
Sommersemester 2021

Ausgabe: 13.07.2021

Abgabe: -

Dieses Blatt ist ein reines Übungsblatt und wird nicht bewertet. Sie müssen es nicht abgeben.

Aufgabe 1: Abschlusseigenschaften von P [6 Punkte]

- a) [3 Punkte] Zeigen Sie, dass P abgeschlossen ist unter Vereinigung, Komplement und Konkatination. Falls $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 \in P$, dann auch $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2 \in P$, $\overline{\mathcal{L}_1} \in P$ und $\mathcal{L}_1 \cdot \mathcal{L}_2 \in P$.
- b) [3 Punkte] Zeigen Sie, dass P abgeschlossen ist unter Kleene Stern. Falls $\mathcal{L}_1 \in P$, dann auch $\mathcal{L}_1^* \in P$.

Aufgabe 2: Erfüllende Belegungen berechnen [6 Punkte]

Zeigen Sie: Wenn wir SAT in P lösen könnten, dann könnten wir auch für jede Formel F in CNF eine erfüllende Belegung in P berechnen. Geben Sie dazu einen Algorithmus in Pseudo-Code an.

Bemerkung: Eine erfüllende Belegung zu berechnen ist stärker als nur die Existenz solch einer Belegung zu finden.

Aufgabe 3: Entailment [8 Punkte]

Wir betrachten das folgende Problem für aussagenlogische Formeln.

Implikationstest (ENTAILMENT)

Gegeben: Aussagenlogische Formeln F, F' in CNF

Entscheide: Impliziert die Formel F die Formel F' ?

Beweisen Sie: ENTAILMENT ist coNP-vollständig (bezüglich Polynomialzeit-Reduktionen).

Beweisen Sie zunächst, dass VALIDITY coNP-hart ist, und reduzieren Sie dann VALIDITY in Polynomialzeit auf ENTAILMENT.

Allgemeingültigkeit (VALIDITY)

Gegeben: Aussagenlogische Formel F in CNF

Entscheide: Ist F allgemeingültig, also eine Tautologie?

Hinweis: Mit Hilfe der Tseitin-Transformation lässt sich in Polynomialzeit zu einer beliebigen aussagenlogischen Formel eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel in CNF berechnen.

Aufgabe 4: Sudoku [10 Punkte]

Betrachten Sie das folgende Problem.

SUDOKU

Gegeben: Eine $n^2 \times n^2$ Sudoku-Matrix M mit Einträgen in $\{1, \dots, n^2, ?\}$

Entscheide: Gibt es eine Möglichkeit die ?-Einträge so zu ersetzen, dass ein korrekt ausgefülltes Sudoku herauskommt?

Eine $n^2 \times n^2$ Sudoku-Matrix M ist in n^2 viele $(n \times n)$ -Blöcke unterteilt. M ist korrekt ausgefüllt, wenn in jedem Block, in jeder Zeile und in jeder Spalte alle Zahlen von 1 bis n^2 genau einmal vorkommen.

Es ist leicht zu sehen, dass SUDOKU in NP liegt, denn wir können die fehlenden Einträge raten und effizient überprüfen. Das heißt, dass es eine polytime-Reduktion von SUDOKU auf SAT geben muss.

Finden Sie nun solch eine Reduktion von SUDOKU auf SAT.

Bemerkung: Man kann sogar zeigen, dass SUDOKU NP-vollständig ist.