René Maseli
Prof. Dr. Roland Meyer

Theoretische Informatik 2
Übungsblatt 3

TU Braunschweig
Sommersemester 2022

Ausgabe: 24.05.2021 Abgabe: 03.06.2021, 23:59

Geben Sie Ihre Lösungen bis Freitag, den 03.06.2021 um 23:59 Uhr, ab. Hinterlassen Sie sie dazu im passenden Fach des Briefkastens vor IZ 343 oder laden Sie sie in den passenden Ordner hoch. Achten Sie darauf, dass Studiengang, Name, Vorname und Matrikelnummer jedes Gruppenmitglieds lesbar vorne auf Ihrer Abgabe zu finden sind.

Aufgabe 1: Nicht-semi-entscheidbare Probleme [10 Punkte]
In der Vorlesung haben Sie gesehen, dass das Akzeptanzproblem unentscheidbar ist. Nun wollen wir ein Problem kennenlernen, das nicht einmal semi-entscheidbar ist.

Non-Self-Acceptance
Gegeben: Turing-Maschine M mit Eingabealphabet $\{0, 1\}$
Frage: Lehnt M ihre eigene Kodierung $\langle M \rangle$ ab?

Als Sprache lässt sich das Problem wie folgt auffassen:

$$L_{NSACC} = \left\{ w \in \{0, 1\}^* \;\middle|\; w \text{ kodiert } M_w \text{ und } w \notin \mathcal{L}(M_w) \right\} .$$

1. [4 Punkte] Beweisen Sie unter Verwendung einer Diagonalisierung, dass L_{NSACC} nicht semi-entscheidbar ist: Nehmen Sie also die Existenz einer TM M mit $\mathcal{L}(M) = L_{NSACC}$ an, betrachten Sie ihre Kodierung $\langle M \rangle$ und leiten Sie einen Widerspruch her.
2. [2 Punkte] Zeigen Sie, dass L_{NSACC} co-semi-entscheidbar ist, d.h. beweisen Sie, dass das Komplementproblem semi-entscheidbar ist.

Non-ε-Acceptance
Gegeben: Turing-Maschine M mit Eingabealphabet $\{0, 1\}$
Frage: Lehnt M die Eingabe ε ab?

Das Problem sei aufgefasst als die Sprache:

$$L_{N\varepsilon ACC} = \left\{ w \in \{0, 1\}^* \;\middle|\; w \text{ kodiert } M_w \text{ und } \varepsilon \notin \mathcal{L}(M_w) \right\}$$

3. [4 Punkte] Zeigen Sie $L_{NSACC} \leq L_{N\varepsilon ACC}$. Was können Sie daraus in Kombination mit den anderen beiden Teilaufgaben schließen?

Aufgabe 2: Universalität [11 Punkte]

Das Universalitätsproblem ist das folgende Entscheidungsproblem.

Universality	
Gegeben:	Turing-Maschine M mit Eingabealphabet $\{0, 1\}$
Frage:	Akzeptiert M alle Eingaben?

Dieses Problem lässt sich als folgende Sprache auffassen:

$$L_{\text{Universality}} = \left\{ w \in \{0, 1\}^* \mid \mathcal{L}(M_w) = \{0, 1\}^* \right\}.$$

1. [5 Punkte] Zeigen Sie, dass $L_{\text{Universality}}$ nicht co-semi-entscheidbar ist. Betrachten Sie dazu das Komplementproblem $\overline{L_{\text{Universality}}} = \{0, 1\}^* \setminus L_{\text{Universality}}$. Beschreiben Sie zunächst diese Sprache. Was bedeutet es für die Maschine M_w, wenn $w \in \overline{L_{\text{Universality}}}$ gilt?

   Reduzieren Sie ein Problem, von dem bekannt ist, dass es nicht semi-entscheidbar ist, auf $\overline{L_{\text{Universality}}}$.

   Hinweis. Die uns bereits bekannten Halte- und Akzeptanzprobleme sind semi-entscheidbar, aber nicht entscheidbar. Gemäß Theorem 3.20 im Skript sind sie also nicht co-semi-entscheidbar.

Im Folgenden werden wir beweisen, dass das Universalitätsproblem nicht semi-entscheidbar ist.

2. [4 Punkte] Eine akzeptierende Berechnung einer DTM A lässt sich als Wort kodieren, indem man die Konfigurationen der Berechnung mit #-Symbolen getrennt hintereinander schreibt, also $c_0\#c_1\#c_2\# \ldots \#c_k$. Geben Sie an, wie man einen Entscheider B konstruiert, welcher die Kodierung einer solchen Berechnung genau dann akzeptiert, wenn es sich **nicht** um eine akzeptierende Berechnung von A zur Eingabe ε handelt.

   Hinweis. Eine Eingabe für B kann entweder keine valide Kodierung einer Berechnung, oder eine akzeptierende, oder eine nicht-akzeptierende Berechnung sein.

3. [2 Punkte] Beweisen Sie, dass das Universalitätsproblem nicht semi-entscheidbar ist.

   Führen Sie dazu eine Reduktion mit Hilfe der vorherigen Teilaufgabe durch.

   Hinweis. Wenn eine Maschine A die Eingabe ε nicht akzeptiert, wie verhält sich dann die dazugehörige Maschine B?

Aufgabe 3: PCP [9 Punkte]

Im folgenden betrachten Sie Abwandlungen des Postschen Korrespondenz-Problems.

1. [3 Punkte] Zeigen Sie, dass das 1-PCP, also das PCP für Instanzen, bei denen die x_i und y_i Wörter über dem unären Alphabet $\{1\}$ sind, entscheidbar ist.

Es sei $|\Sigma| \geq 2$. Das $\text{PCP}_{\geq k}$ ist folgendes Entscheidungsproblem.

> **$\text{PCP}_{\geq k}$**
> **Gegeben:** Eine endliche Menge von Wort-Paaren $(x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m)$ über Σ^*
> **Frage:** Gibt es eine endliche Sequenz von Indizes $i_1, \dots, i_n$ mit $n \geq k$ und $x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n} = y_{i_1} y_{i_2} \dots y_{i_n}$?

2. [3 Punkte] Zeigen Sie, dass das $\text{PCP}_{\geq k}$ unentscheidbar ist.

Es sei $|\Sigma| \geq 2$. Das Last-PCP ist folgendes Entscheidungsproblem.

> **Last-PCP**
> **Gegeben:** Eine endliche Menge von Wort-Paaren $(x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m)$ über Σ^*
> **Frage:** Gibt es eine endliche Sequenz von Indizes $i_1, \dots, i_n$ mit $i_n = m$ und $x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n} = y_{i_1} y_{i_2} \dots y_{i_n}$?

3. [3 Punkte] Zeigen Sie, dass das Last-PCP unentscheidbar ist.