René Maseli
Prof. Dr. Roland Meyer

Theoretische Informatik 2
Übungsblatt 3

TU Braunschweig
Sommersemester 2023

Ausgabe: 16.05.2023 Abgabe: 24.05.2023, 18:00

Geben Sie Ihre Lösungen bis Mittwoch, den 24.05.2023 um 18:30 Uhr, ab. Laden Sie sie dazu als PDF oder Scan im Vips im Stud.IP hoch. Geben Sie als 4er-Gruppe ab. Achten Sie darauf, dass **Studiengang, Name Vorname und Matrikelnummer** jedes Gruppenmitglieds lesbar vorne auf Ihrer Abgabe zu finden sind.

Bemerkung: Am 19. Mai wurde Aufgabe 2 a) nachträglich geändert, da sie in dieser Form unlösbar war.

Hausaufgabe 1: Berechenbarkeit [10 Punkte]

Eine (deterministische, 1-Band-) Turing-Maschine heißt **regulär**, falls alle Transitionen entweder

- halten, also für $q \in Q$ und $a \in \Gamma$ von der Form $q \xrightarrow{aaN} q$ sind, oder
- den Kopf beim nach rechts bewegen und in einen nicht-akzeptierende, also für $p, q \in Q \setminus Q_F$ und $a, b \in \Gamma \setminus \{\sqcup\}$ von der Form $p \xrightarrow{abR} q$ sind, oder
- am Ende akzeptieren, also für $p \in Q$, $q_f \in Q_F$ von der Form $p \xrightarrow{\sqcup\sqcup N} q_f$ sind.

a) [6 Punkte] Gegeben ist die folgende totale Funktion $\text{shortest} : \text{TM} \to \mathbb{N} \cup \{\bot\}$.

$$\text{shortest}(M) = \begin{cases} v & \text{falls } M \text{ regulär und } v \text{ das einzige kürzeste Wort in } \mathcal{L}(M) \text{ ist.} \\ \bot & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass die Funktion berechenbar ist, indem Sie einen Algorithmus verfassen, welcher shortest berechnet.

Nonregular-Computation	
Gegeben:	Eine Turing-Maschine M mit Eingabealphabet $\{0, 1\}$ und ein Wort $x \in \{0, 1\}^*$.
Frage:	Unternimmt M bei der Berechnung von x eine Bewegung nach links?

b) [4 Punkte] Nutzen Sie die universelle Turing-Maschine U aus der Vorlesung als Subroutine, um zu zeigen, dass Nonregular-Computation semi-entscheidbar ist.
Beachten Sie dabei, dass U nur die Akzeptanz-Bedingung prüfen kann.

Hinweis: Es lässt sich sogar zeigen, dass Nonregular-Computation co-semi-entscheidbar ist.

Hausaufgabe 2: Unentscheidbarkeit [7 Punkte]
Widerlegen Sie nun die Entscheidbarkeit der folgenden Probleme.

1-Bounded-Acceptance	
Gegeben:	Eine Turing-Maschine M mit Eingabealphabet $\{0, 1\}$.
Frage:	Akzeptiert M nicht mehr als ein Wort?

a) [3 Punkte] Zeigen Sie, dass 1-Bounded-Acceptance nicht semi-entscheidbar ist, indem Sie EMPTINESS auf die Sprache BACC := $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |\mathcal{L}(M_w)| < 2\}$ reduzieren.

Hinweis: EMPTINESS := $\{w \in \{0, 1\}^* \mid \mathcal{L}(M_w) = \emptyset\}$ ist co-semi-entscheidbar, aber nicht semi-entscheidbar. Dies wird am Montag genauer besprochen.

Safe-Leading	
Gegeben:	Zwei Turing-Maschinen M_0 und M_1 mit Eingabealphabet $\{0, 1\}$ und ein Wort $x \in \{0, 1\}^*$.
Frage:	Ist M_1 bei der Berechnung von x immer gleichzeitig in einem Zustand mit mindestens so hohen Index wie M_0?

b) [4 Punkte] Zeigen Sie dass Safe-Leading nicht semi-entscheidbar ist.

Übungsaufgabe 3:
In der Vorlesung haben Sie gesehen, dass das Akzeptanzproblem unentscheidbar ist. Nun wollen wir ein Problem kennenlernen, das nicht einmal semi-entscheidbar ist.

Non-Self-Acceptance	
Gegeben:	Turing-Maschine M mit Eingabealphabet $\{0, 1\}$
Frage:	Lehnt M ihre eigene Kodierung $\langle M \rangle$ ab?

Als Sprache lässt sich das Problem wie folgt auffassen:

$$L_{NSACC} = \left\{w \in \{0, 1\}^* \;\middle|\; w \text{ kodiert } M_w \text{ und } w \notin \mathcal{L}(M_w)\right\}.$$

Beweisen Sie unter Verwendung einer Diagonalisierung, dass L_{NSACC} nicht semi-entscheidbar ist: Nehmen Sie also die Existenz einer TM M mit $\mathcal{L}(M) = L_{NSACC}$ an, betrachten Sie ihre Kodierung $\langle M \rangle$ und leiten Sie einen Widerspruch her.

Zeigen Sie, dass L_{NSACC} co-semi-entscheidbar ist, d.h. beweisen Sie, dass das Komplementproblem semi-entscheidbar ist.

Non-ε-Acceptance

Gegeben: Turing-Maschine M mit Eingabealphabet $\{0,1\}$

Frage: Lehnt M die Eingabe ε ab?

Das Problem sei aufgefasst als die Sprache:

$$L_{N\varepsilon ACC} = \left\{w \in \{0,1\}^* \;\middle|\; w \text{ kodiert } M_w \text{ und } \varepsilon \notin \mathcal{L}(M_w)\right\}$$

Zeigen Sie $L_{NSACC} \leq L_{N\varepsilon ACC}$. Was können Sie daraus in Kombination mit den anderen beiden Teilaufgaben schließen?

Übungsaufgabe 4:

Das Universalitätsproblem ist das folgende Entscheidungsproblem.

Universality

Gegeben: Turing-Maschine M mit Eingabealphabet $\{0,1\}$

Frage: Akzeptiert M alle Eingaben?

Dieses Problem lässt sich als folgende Sprache auffassen:

$$L_{\text{Universality}} = \left\{w \in \{0,1\}^* \;\middle|\; \mathcal{L}(M_w) = \{0,1\}^*\right\}.$$

Zeigen Sie, dass $L_{\text{Universality}}$ nicht co-semi-entscheidbar ist. Betrachten Sie dazu das Komplementproblem $\overline{L_{\text{Universality}}} = \{0,1\}^* \setminus L_{\text{Universality}}$. Beschreiben Sie zunächst diese Sprache. Was bedeutet es für die Maschine M_w, wenn $w \in \overline{L_{\text{Universality}}}$ gilt?

Reduzieren Sie ein Problem, von dem bekannt ist, dass es nicht semi-entscheidbar ist, auf $\overline{L_{\text{Universality}}}$.

Hinweis. Die uns bereits bekannten Halte- und Akzeptanzprobleme sind semi-entscheidbar, aber nicht entscheidbar. Gemäß Theorem 3.20 im Skript sind sie also nicht co-semi-entscheidbar.

Eine akzeptierende Berechnung einer DTM A lässt sich als Wort kodieren, indem man die Konfigurationen der Berechnung mit #-Symbolen getrennt hintereinander schreibt, also $c_0\#c_1\#c_2\#\ldots\#c_k$. Geben Sie an, wie man einen Entscheider B konstruiert, welcher die Kodierung einer solchen Berechnung genau dann akzeptiert, wenn es sich **nicht** um eine akzeptierende Berechnung von A zur Eingabe ε handelt.

Hinweis. Eine Eingabe für B kann entweder keine valide Kodierung einer Berechnung, oder eine akzeptierende, oder eine nicht-akzeptierende Berechnung sein.

Beweisen Sie, dass das Universalitätsproblem nicht semi-entscheidbar ist. Führen Sie dazu eine Reduktion mit Hilfe der vorherigen Teilaufgabe durch.

Hinweis. Wenn eine Maschine A die Eingabe ε nicht akzeptiert, wie verhält sich dann die dazugehörige Maschine B?

Übungsaufgabe 5:
Zeigen Sie, dass das 1-PCP, also das PCP für Instanzen, bei denen die x_i und y_i Wörter über dem unären Alphabet $\{1\}$ sind, entscheidbar ist.

Es sei $|\Sigma| \geq 2$. Das $\mathrm{PCP}_{\geq k}$ ist folgendes Entscheidungsproblem.

$\mathrm{PCP}_{\geq k}$	
Gegeben:	Eine endliche Menge von Wort-Paaren $(x_1, y_1), \ldots, (x_m, y_m)$ über Σ^*
Frage:	Gibt es eine endliche Sequenz von Indizes $i_1, \ldots, i_n$ mit $n \geq k$ und $x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_n} = y_{i_1} y_{i_2} \ldots y_{i_n}$?

Zeigen Sie, dass das $\mathrm{PCP}_{\geq k}$ unentscheidbar ist.

Es sei $|\Sigma| \geq 2$. Das Last-PCP ist folgendes Entscheidungsproblem.

Last-PCP	
Gegeben:	Eine endliche Menge von Wort-Paaren $(x_1, y_1), \ldots, (x_m, y_m)$ über Σ^*
Frage:	Gibt es eine endliche Sequenz von Indizes $i_1, \ldots, i_n$ mit $i_n = m$ und $x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_n} = y_{i_1} y_{i_2} \ldots y_{i_n}$?

Zeigen Sie, dass das Last-PCP unentscheidbar ist.