René Maseli
Prof. Dr. Roland Meyer

# Theoretische Informatik 2
## Übungsblatt 5

TU Braunschweig
Sommersemester 2023

Ausgabe: 20.06.2023 Abgabe: 28.06.2023, 18:30

Geben Sie Ihre Lösungen bis Mittwoch, den 28.06.2023 um 18:30 Uhr, ab. Laden Sie sie dazu als PDF oder Scan im Vips im Stud.IP hoch. Geben Sie als 4er-Gruppe ab. Achten Sie darauf, dass **Studiengang, Name Vorname und Matrikelnummer** jedes Gruppenmitglieds lesbar vorne auf Ihrer Abgabe zu finden sind.

**Hausaufgabe 1: NL-Vollständigkeit [12 Punkte]**
Reichern Sie Ihre Sammlung über NL-vollständige Probleme etwas an.

| **Nicht-Leerheit regulärer Sprachen (NONEMPTY-REG)** | |
|---|---|
| **Gegeben:** | Eine Turing-Maschine $M$. |
| **Frage:** | Ist $M$ regulär und gilt $\mathcal{L}(M) \neq \emptyset$? |

a) [3 Punkte] Zeigen Sie, dass NONEMPTY-REG $\in$ NL gilt, indem Sie einen entsprechenden nichtdeterministischen Entscheider mit logarithmisch-beschränkter Platzkomplexität angeben.
**Hinweis:** Sie können annehmen, dass das Erkennen von ‚$M$ ist regulär' deterministisch logspace-entscheidbar ist.

b) [3 Punkte] Zeigen Sie, dass NONEMPTY-REG NL-hart bezüglich Logspace-Many-One-Reduktionen ist, indem Sie eine Reduktion für PATH $\leq_{\mathrm{m}}^{\log}$ NONEMPTY-REG angeben.

| **Unendlichkeit regulärer Sprachen (INFINITE-REG)** | |
|---|---|
| **Gegeben:** | Eine Turing-Maschine $M$. |
| **Frage:** | Sind $M$ regulär und $\mathcal{L}(M)$ unendlich groß? |

c) [6 Punkte] Zeigen Sie, dass INFINITE-REG NL-vollständig bzgl. Logspace-Many-One-Reduktionen ist.

**Hausaufgabe 2: Komplexitätsklassen [6 Punkte]**
Beweisen Sie die folgenden Lemmata:

a) [2 Punkte] Seien $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ zwei Funktionen und $m \geq m' \in \mathbb{N}$ Band-Anzahlen. Falls $\forall x \in \mathbb{N} : g(x) \leq f(x)$ und $\mathrm{NTIME}_m(f) \subseteq \mathrm{DTIME}_{m'}(g)$ gelten, dann folgt $\mathrm{NTIME}_m(f) = \mathrm{coNTIME}_m(f)$.

b) [4 Punkte] Sei $\mathcal{C}$ eine Komplexitätsklasse, $R$ eine Menge von Funktionen und $A \in \mathcal{C}$ ein Problem. Wenn $A$ $\mathcal{C}$-hart/vollständig ist, dann ist $\overline{A}$ co$\mathcal{C}$-hart/vollständig (jeweils bezüglich $R$-many-one-Reduktionen).

**Übungsaufgabe 3:**

Sei $\Sigma$ ein endliches Alphabet. Beweisen Sie:

a) Sei $B$ nichttrivial. Ein Problem $A \subseteq \Sigma^*$ ist in L genau dann, wenn $A \leq_{\mathrm{m}}^{\log} B$.

b) Jede nichttriviale Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ in L ist bereits L-vollständig (bezüglich logspace-many-one-Reduktionen).

**Übungsaufgabe 4:**

In der Vorlesung wurde die NL-Vollständigkeit von PATH gezeigt. Wir interessieren uns im folgenden nun für weitere NL-vollständige Probleme.

| **Pfadexistenz mit Zwischenknoten (INTERPATH)** | |
|---|---|
| **Gegeben:** | Gerichteter azyklischer Graph $G = \langle V, \to \rangle$, Knoten $s, t, u \in V$ |
| **Frage:** | Gibt es einen Pfad von $s$ über $t$ nach $u$ in $G$? |

a) Zeigen Sie, dass INTERPATH NL-vollständig ist, indem Sie zuerst INTERPATH $\leq_{\mathrm{m}}^{\log}$ PATH, und anschließend PATH $\leq_{\mathrm{m}}^{\log}$ INTERPATH zeigen.

| **Pfadexistenz in azyklischen Graphen (ACYCPATH)** | |
|---|---|
| **Gegeben:** | Gerichteter azyklischer Graph $G = \langle V, \to \rangle$, Knoten $s, t \in V$ |
| **Frage:** | Gibt es einen Pfad von $s$ nach $t$ in $G$? |

b) [4 Punkte] Zeigen Sie, dass sich das Problem PATH auf ACYCPATH reduzieren lässt. Geben Sie die Funktion explizit an und beweisen Sie, dass sie eine logspace-many-one-Reduktion ist.

| **Azyklizität (ACYCLIC)** | |
|---|---|
| **Gegeben:** | Gerichteter Graph $G = \langle V, \to \rangle$ |
| **Frage:** | Ist $G$ azyklisch? |

c) [4 Punkte] Beim Problem ACYCPATH nehmen wir an, dass die Eingabe ein azyklischer Graph ist. Wir wollen nun für einen gegebenen Graphen feststellen, ob er diese Eigenschaft hat. Beweisen Sie, dass ACYCLIC selbst bereits NL-vollständig ist.

**Übungsaufgabe 5:**

Im folgenden betrachten wir die Klassen der NL und NL-vollständigen Probleme.

a) Zeigen Sie, dass die Klasse NL unter Vereinigung, Durchschnitt, Komplement und Kleene-Stern abgeschlossen ist.

b) Nun untersuchen Sie die Klasse der NL-harten Probleme auf Abgeschlossenheit unter diesen Operationen.