Abschlussklausur
Theoretische Informatik 2
27. Juli 2021

Prof. Dr. Roland Meyer
Thomas Haas
TU Braunschweig
Sommersemester 2021

1. Lesen und unterschreiben Sie die **Erklärung nach Abschluss der Online-Prüfung**. Laden Sie diese unbedingt in den **Abgabeordner** hoch, Ihre Klausur gilt sonst als **nicht bestanden**.

   Falls Sie die Erklärung weder händisch noch digital unterschreiben können, schreiben Sie eine E-Mail an *t.haas@tu-bs.de* und *a.soleinsky@tu-bs.de*. Geben Sie in dieser E-Mail **alle Informationen an**, die in der Erklärung abgefragt werden.

2. Schreiben Sie **leserlich** und **nummerieren** Sie die Seiten Ihrer Abgabe.

3. **Laden** Sie bis zum Ende der Klausur Ihre **Abgabe** in den dafür vorgesehenen **Abgabeordner hoch**. Sie können Ihre **Abgabe** dazu **abfotografieren**, **einscannen** oder **direkt als PDF** per Tablet oder Ähnlichem erstellen. Abgaben als **.pdf, .jpg** oder sonstigen **Standardformaten** sind möglich.

4. Der Dateiname Ihrer Klausur soll MatNr_Nachname sein. Der Dateiname Ihrer Erklärung nach Abschluss der Online-Prüfung soll MatNr_Nachname_Erklaerung sein.

   Beispiel: 4444444_Mustermann_Max.pdf und
   4444444_Mustermann_Max_Erklaerung.pdf

   Falls Sie mehrere Dateien abgeben, fügen Sie entsprechende Suffixe in der Form _Suffix hinzu (z.B. 4444444_Mustermann_Max_2.pdf für die zweite Seite der Abgabe).

5. Sie dürfen das **Skript** und ihre **eigenen Aufzeichnungen** verwenden. Das Heranziehen **fremder Hilfe** (z.B. andere Studenten oder Internetforen) ist **untersagt**.

6. Wenn Sie im Laufe der Klausur **Fragen** haben, steht Ihnen folgender BBB-Raum zur Verfügung:
   `https://webconf.tu-bs.de/tho-6n6-t7e`
   Stellen Sie Ihre Frage über den öffentlichen Chat. **Nach Beantwortung** Ihrer Frage, **verlassen** Sie bitte den BBB-Raum wieder.

7. Falls **technische Probleme** auftreten, machen Sie bitte **Beweisfotos** und melden Sie anschließend die Probleme telefonisch unter +49 531-391-9522.

8. Wir werden den Termin für die Klausureinsicht auf unserer Website bekanntgeben:
   `tcs.cs.tu-bs.de/teaching/TheoInf2_SS_2021.html`.

9. Die **Bearbeitungszeit** beträgt **240 Minuten**. 60 Minuten Extrazeit für den technischen Zusatzaufwand sind bereits eingerechnet. Laden Sie die Klausur **rechtzeitig** hoch!

10. Mit **40 Punkten** ist die Klausur **sicher bestanden.**

1. TM-Konstruktion

10 Punkte

Betrachten Sie die Sprache $\mathcal{L} = \{w \in \{a,b\}^* \mid \text{Es gibt } n \in \mathbb{N} \text{ mit: } |w| = 2^n\}$. Beachten Sie, dass $0 \in \mathbb{N}$ gilt.

Konstruieren Sie eine DTM M, die diese Sprache akzeptiert.

- Erklären Sie die Arbeitsweise der Maschine ausführlich. Geben Sie insbesondere die Aufgabe jedes Kontrollzustands der Maschine an.
- Geben Sie die Transitionen der Maschine explizit an, z.B. in Form einer Tabelle oder als Zustandsgraph.
- Sie können wahlweise annehmen, dass das Band auf beiden Seiten der Eingabe mit ␣-Symbolen gefüllt ist, oder dass das Band auf der linken Seite durch ein \$-Symbol beschränkt ist. Geben Sie an, wofür Sie sich entschieden haben und geben Sie an, auf welches Symbol der Lese-/Schreibkopf initial zeigt.

Hinweis: Benutzen Sie 2 Bänder.

Zu Aufgabe 1:

2. NP-Vollständigkeit

$\boxed{4 + 6 = 10 \text{ Punkte}}$

Betrachten Sie das folgende Problem.

Small Hamiltonian-Cycle (SHC)	
Gegeben:	Ein gerichteter Graph $G = (V, E)$
Entscheide:	Gibt es einen einfachen Kreis in G, der genau $\lceil \frac{n}{4} \rceil$ viele Knoten enthält?

Zeigen Sie, dass SHC NP-vollständig (bzgl. Polynomialzeit-Reduktionen) ist:

a) „Membership“: SHC $\in$ NP.

b) „Hardness“: SHC ist NP-schwer (bzgl. Polynomialzeit-Reduktionen).

Bemerkung: Ein einfacher Kreis enthält keine Knoten doppelt. Der Start- btw. Endknoten des Kreises wird nur ein mal gezählt.

3. Entscheidbarkeit

10 Punkte

Betrachten Sie die Sprache aller Tupel von Kodierungen von Turing-Maschinen, deren Sprachen übereinstimmen.

$$\mathcal{L} = \left\{ w\#u \in \{0, 1, \#\}^* \mid \mathcal{L}(M_w) = \mathcal{L}(M_u) \right\}.$$

Beweisen Sie, dass $\mathcal{L}$ nicht entscheidbar ist. Benutzen Sie **nicht** den Satz von Rice.

4. NL-Vollständigkeit

5 + 5 = 10 Punkte

Wir nennen zwei Pfade Knoten-verschieden, wenn es einen Knoten gibt, der nur in einem der beiden Pfade auftaucht. Betrachten Sie nun das folgende Problem.

Two-way-reachability (TWR)

Gegeben: Ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ und Knoten s, t.

Entscheide: Gibt es in G zwei Knoten-verschiedene Pfade von s nach t?

Zeigen Sie, dass TWR NL-vollständig (bzgl. logspace-many-one-Reduktionen) ist:

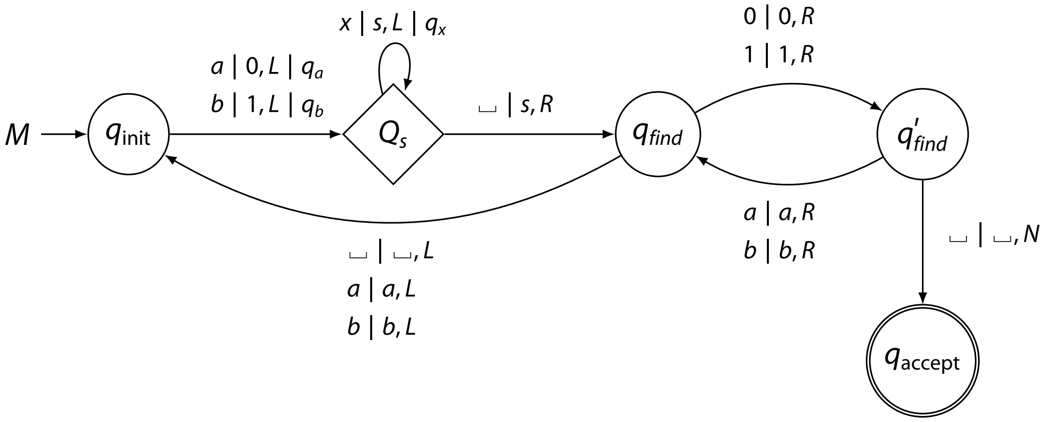
a) „Membership“: TWR $\in$ NL.

b) „Hardness“: TWR ist NL-schwer (bzgl. logspace-many-one-Reduktionen).

5. TM-Analyse

$\boxed{5+2+3=10 \text{ Punkte}}$

Betrachten Sie die 1-Band TM M mit Eingabealphabet $\Sigma = \{a, b\}$, Bandalphabet $\Gamma = \{a, b, 0, 1, \sqcup\}$ und Zustandsmenge $Q = \{q_{\text{init}}, q_{\text{accept}}, q_0, q_1, q_a, q_b, q_{find}, q'_{find}\}$.Hierbei ist q_{init} der Startzustand und q_{accept} der akzeptierende Zustand. Q_s ist eine Zustandsmenge, die abkürzend für die Zustände q_0, q_1, q_a und q_b steht. Ein Übergang nach Q_s von der Form $x \mid y, D \mid q_s$ steht für eine Transition, die wie üblich x liest, y schreibt, eine Kopfbewegung $D \in \{L, R, N\}$ macht und in den konkreten Zustand $q_s \in Q_s$ geht. Das x in der Q_s-Loop steht für einen beliebigen Buchstaben $x \in \{0, 1, a, b\}$. Das s in den Transitionen entspricht dem Index des konkreten Zustands q_s (z.B. ist $s = a$ in Zustand q_a, und $s = 1$ in Zustand q_1).



a) Beschreiben Sie die Arbeitsweise von M in Worten und geben Sie diese als Pseudo-Code an.

b) Interpretieren Sie M nun als Entscheider. Was ist die von M akzeptierte Sprache?

c) Interpretieren Sie M nun als Berechner. Was ist die von M berechnete Funktion f?

Hinweise: Bei Eingabe w startet die Maschine in der Konfiguration $\ldots\sqcup q_{\text{init}}\, w \sqcup \ldots$, d.h. links und rechts von der Eingabe befinden sich $\sqcup$-Symbole und der Lese-/Schreibkopf zeigt auf den ersten Buchstaben der Eingabe. Der Funktionswert $f(w)$ ist definiert als w', wenn M bei Eingabe w mit Bandinhalt w' akzeptiert (die Kopfposition ist egal). Alle fehlenden Transitionen führen dazu, dass die Maschine die Berechnung beendet und keine Ausgabe erzeugt.

Zu Aufgabe 5:

6. Zig-Zag TM

10 Punkte

Eine **Zig-Zag TM** *M* ist wie eine übliche TM definiert, hat aber eine besondere Restriktion: *M* muss in jeder Transition eine Kopfbewegung machen und darf niemals 3 mal hintereinander den Kopf in die selbe Richtung bewegen.

Zeigen Sie, dass Zig-Zag TMs **gleichmächtig** zu üblichen TMs sind.

7. Berechenbarkeit

$\boxed{7 + 3 \text{ Punkte}}$

Es sei $\Sigma = \{0, 1\}$. Betrachen Sie die Funktion $add : \Sigma^* \times \Sigma^* \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit

$$add(w, u, t) = \min_{x \in \Sigma^*} \{ \ \min(Time_w(x) + Time_u(x), t) \ \}$$

Hierbei sind w, u Kodierungen von Turingmaschinen und t eine unär-kodierte Zahl.

a) Zeigen Sie, dass *add* berechenbar ist. Geben Sie entsprechenden Pseudo-Code an.

b) Was ist die Zeitkomplexität ihres Algorithmus? Beachten Sie, dass t unär kodiert ist.

Hinweis: $Time_w(x)$ ist die Anzahl der Schritte, die w braucht, um auf x zu halten, oder ∞, falls w nicht hält.

8. Quiz

$\boxed{2 + 2 + 3 + 3 = 10 \text{ Punkte}}$

Beantworten Sie die folgenden Fragen. Begründen Sie Ihre Antwort mit einem kurzen Beweis oder einem Gegenbeispiel.

a) Die symmetrische Differenz $\mathcal{L}_1 \triangle \mathcal{L}_2 = (\mathcal{L}_1 \setminus \mathcal{L}_2) \cup (\mathcal{L}_2 \setminus \mathcal{L}_1)$ zweier semi-entscheidbarer Sprachen ist immer semi-entscheidbar.

b) Ist folgendes Argument korrekt? Wenn $\mathcal{L}_1$ semi-entscheidbar ist und $\mathcal{L}_2$ co-semi-entscheidbar, dann ist der Durchschnitt $(\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2)$ sowohl semi-entscheidbar als auch co-semi-entscheidbar und damit sogar entscheidbar.

c) Sei $\mathcal{L}_1$ eine semi-entscheidbare, aber unentscheidbare Sprache und sei $\mathcal{L}_2 \subset \mathcal{L}_1$ eine entscheidbare Teilsprache. Dann ist $\mathcal{L}_1 \setminus \mathcal{L}_2$ unendlich.

d) Das Akzeptanzproblem ACCEPT ist NP-schwer.

9. Entscheidbarkeit 2

5 + 5 = 10 Punkte

Betrachten Sie das folgende Problem.

TRAVELING-TM

Gegeben: Kodierung w einer TM mit Eingabealphabet $\{0, 1\}$.

Entscheide: Immer wenn M_w ein Wort x akzeptiert, dann besucht Sie dabei alle ihre Zustände bis auf q_{reject}.

a) Zeigen Sie, dass TRAVELING-TM co-semi-entscheidbar ist.

b) Zeigen Sie, dass TRAVELING TM unentscheidbar ist.

10. TM mit Transitionskosten

10 Punkte

Sei T die Menge aller Transitionen einer TM M. Sei $f : T \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}^+$ eine berechenbare Kostenfunktion, die bei Eingabe x jeder Transition t in M die Kosten $f(t, |x|)$ zuordnet. Sei $\tau = t_1 t_2 \ldots t_k$ die Sequenz der Transitionen, die M bei einer Berechnung auf x gemacht hat. Wir nennen die Berechnung kostengünstig, wenn $\sum_{i=1}^{k} f(t_i, |x|) \leqslant |x|$ gilt, d.h. die Summe aller Transitionskosten überschreitet nicht $|x|$. Wir nennen M kostengünstig bzgl. f, wenn jedes Wort in $\mathcal{L}(M)$ von einer kostengünstigen Berechnung akzeptiert wird.

Zeigen Sie nun folgendes: Wenn M kostengünstig bzgl. einer Kostenfunktion f ist, dann gibt es eine zeitbeschränkte TM M' mit $\mathcal{L}(M') = \mathcal{L}(M)$. Geben Sie die Zeitschranke dieser TM M explizit an.

Hinweise:

- Positive rationale Zahlen $\frac{p}{q}$ aus $\mathbb{Q}^+$ können als Tupel positiver natürlicher Zahlen (p, q) dargestellt werden.
- Eine TM M' ist zeitbeschränkt durch $t : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, wenn M' auf jeder Eingabe x nach maximal $t(|x|)$ vielen Schritten hält.